

N° D'ORDRE :

1225

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Casimir MONTEIL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'ARTS ET MÉTIERS D'AIX
ET DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COURANTS DE
CONVECTION CALORIFIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 décembre 1905 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, } *Examinateurs.*
PICARD, }

PARIS

ÉDITIONS DE « L'ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE »

40, RUE DES ÉCOLES, 40.

1905

N° D'ORDRE :

1225

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Casimir MONTEIL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE D'ARTS ET MÉTIERS D'AIX
ET DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES COURANTS DE
CONVECTION CALORIFIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **22** décembre 1905 devant la Commission d'Examen.

MM. APPELL, *Président.*
BOUSSINESQ, } *Examineurs.*
PICARD, }



PARIS

ÉDITIONS DE « L'ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE »

40, RUE DES ÉCOLES, 40

1905

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
Doyen.	P. APPELL.	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire.	G. DARBOUX, professeur	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires.	{ L. TROOST Ch. WOLF.	
	LIPPMANN.	Physique.
	BOUTY.	Physique.
	BOUSSINESQ.	Physique mathémat. et calcul des probabilités.
	PICARD.	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Y. DELAGE.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparées.
	G. BONNIER.	Botanique.
	DASTRE.	Physiologie.
	DITTE.	Chimie.
	GIARD.	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	KÖNIGS.	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.	Géographie physique.
	GOUSSAT.	Calcul différentiel et calcul intégral.
Professeurs.	{ CHATIN. PELLAT. HALLER. H. MOISSAN. JOANNIS. JANET. WALLERANT. ANDOYER. PAINLEVÉ. HAUG. P. CURIE. TANNERY. RAFFY. HOUSSAY. N.. N.. PUISEUX. RIBAN. LEDUC. HADAMARD. MATRUCHOT. MICHEL. DAGUILLON. BOUYEAULT. BOREL.	Histologie. Physique. Chimie organique. Chimie. Chimie (enseignement P. C. N.). Physique (enseignement P. C. N.). Minéralogie. Astronomie physique. Mathématiques générales. Géologie. Physique. Calcul différentiel, calcul intégral. Application de l'analyse à la Géométrie. Zoologie. Chimie biologique. Zoologie, Anatomie, Physiologie comparées. Mécanique et Astronomie. Chimie analytique. Physique. Calcul différentiel et intégral. Botanique. Minéralogie. Botanique. Chimie organique. Théorie des fonctions.
Professeurs adjoints.		
Secrétaire.	A. GUILLET.	

A MONSIEUR

P. APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT, DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE

Hommage très respectueux

A MONSIEUR

J. BOUSSINESQ

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Hommage de profonde reconnaissance

A MONSIEUR

E. PICARD

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FACULTE DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE

Hommage de profonde reconnaissance



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554605_0062

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE DES COURANTS DE CONVECTION CALORIFIQUE

INTRODUCTION

1. — **Historique des courants de convection.** — L'équation aux dérivées partielles régissant la propagation de la chaleur dans les fluides en mouvement a été découverte par Fourier en 1820, et insérée en 1833, trois ans après la mort de son illustre auteur, au tome XII des mémoires de l'Académie des Sciences. Mais, par une analogie instinctive avec le cas des solides qui lui était familier, Fourier laisse constant le coefficient de chaleur spécifique par unité de volume. Or, c'est plutôt, comme le fait remarquer M. Boussinesq ⁽¹⁾, la chaleur par unité de masse qui demeure constante, quand la densité varie.

Quelques années plus tard, Poisson et Ostrogradsky, ramenèrent

(1) BOUSSINESQ. — *Théorie analytique de la chaleur*, tome II, page 160.

l'équation aux dérivées partielles, qui régit le phénomène, à sa forme la plus simple :

$$(1) \quad \theta' = \frac{K}{C} \Delta_2 \theta (t)$$

où K désigne la conductibilité intérieure du fluide, C sa chaleur spécifique par unité de volume, ces deux coefficients étant supposés demeurer constants dans les limites où varie la température.

On voit la grande analogie de la forme (1) avec celle de l'équation usuelle que Fourier avait donnée bien antérieurement pour les solides isotropes: cette équation (1) exprime, en effet, que la dérivée θ' , par rapport au temps t , de la température θ d'une même particule fluide *suivie dans son mouvement*, est, à chaque instant, proportionnelle au paramètre différentiel $\Delta_2 \theta$, dérivée naturelle, *dans l'espace*, de la température actuelle θ , ou mesure de sa rapidité *moyenne* d'accroissement autour de la particule.

Cette loi est très simple ; et cependant, son adjonction aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, incomplètes sans cela, paraissait rendre tout à fait inabordable le problème des mouvements d'un fluide. Aussi, pendant longtemps, n'a-t-on su tirer aucun parti de ces équations.

M. Boussinesq a consacré aux courants de convection calorifique quelques chapitres (leçons XXXIII, XXXIV, XXXV, tome II), de sa « Théorie analytique de la chaleur ». Il établit d'abord, en partant des hypothèses de la Thermodynamique, l'équation indéfinie, aux dérivées partielles, de la température dans un fluide en mouvement :

$$C\theta' = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right).$$

En faisant C , K constants, on retrouve l'équation (1) de Poisson.

M. Boussinesq, sans pouvoir toutefois intégrer le système formé par cette équation indéfinie, jointe à des conditions limites, retrouve par le calcul quelques-uns des résultats d'expérience de Dulong et Petit, Ser⁽²⁾ et Compan⁽³⁾.

Dans quatre communications récentes faites à l'Académie des

(1) POISSON. — *Théorie mathématique de la chaleur*, page 93.

(2) SER. — *Cours de Physique industrielle de l'Ecole Centrale*.

(3) COMPAN. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1901-1902.

Sciences ⁽¹⁾ et développées dans son cours à la Sorbonne, M. Boussinesq expose le calcul du pouvoir refroidissant d'un courant gazeux dirigé suivant une direction perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ou suivant l'axe d'un corps de révolution, avec extension à tout corps convexe. Notons ce point essentiel, pour ce qui va suivre, que cette convection revient à un rayonnement dans une atmosphère en repos, suivant la loi de Newton, mais avec un coefficient de rayonnement différent, fonction des éléments de la convection. Pour les corps de même forme, orientés de la même manière dans le courant, ce coefficient de rayonnement équivalent est proportionnel aux quatre racines carrées de la conductibilité intérieure du fluide, de sa capacité calorifique par unité de volume, de sa vitesse générale et de l'inverse du trajet des filets fluides sur le corps.

Il me reste à citer, dans un autre ordre d'idées, les travaux de Ser, qui fut professeur à l'Ecole Centrale. Cet éminent ingénieur, dont l'ouvrage de Physique industrielle a rendu de si grands services aux praticiens, a étudié les courants de convection dans les appareils industriels, cheminées d'usines, récupérateurs de chaleurs perdues, conduites de vapeur, etc.....

2. — **Objet de ce travail.** — L'étude des courants de convection a donc été faite jusqu'ici dans deux voies différentes et qui s'ignorent mutuellement. Les uns ont gardé à la question toute sa généralité et sa rigueur, et faute, d'une part, de concessions à l'exactitude des hypothèses, et d'autre part, de particularisation de l'énoncé, sont restés dans le vague des équations aux dérivées partielles inintégrables. M. Boussinesq seul a su tirer des conclusions claires, pratiques, dont quelques-unes sont déjà utilisées par les ingénieurs. Les autres, comme Ser, se sont préoccupés uniquement d'un calcul sommaire, qui ne pénètre pas suffisamment dans l'intimité du phénomène.

Il m'a paru intéressant de fondre ces deux voies en une seule, qui utilise les armes précises des premiers, et se borne aux problèmes concrets des seconds. On peut arriver ainsi à fournir aux ingénieurs, non pas des formules simples et condensées — la chose est impossible — mais des formules calculables numériquement

(1) BOUSSINESQ. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 et 16 mai 1904, 2 et 9 janvier 1905. Ces notes sont réunies et développées dans le *Journal des Mathématiques pures et appliquées* (1905).

malgré leur longueur, et pouvant se traduire en barèmes utilisables par eux.

Comme le fait remarquer Barré de Saint-Venant, dans son intéressant mémoire *sur une méthode d'approximation*, les questions de mécanique usuelle confinent souvent à des questions de haute géométrie. C'est ainsi que le problème des cheminées conduit à considérer pour la première fois, à ma connaissance, deux fonctions u , v , régies par deux équations aux dérivées partielles *de types différents*, et devant se raccorder, ainsi que leurs dérivées, tout le long de la séparative des deux domaines où elles sont définies. La disparité des deux équations donne aux développements en série que comporte la solution du problème une forme nouvelle bien digne de fixer l'attention des géomètres.

En terminant cette introduction, je me permets de témoigner ici ma profonde reconnaissance à mon maître, M. Boussinesq, dont la haute science et la grande bonté ont soutenu mes efforts.

Je dois également à M. Picard, mes vifs remerciements pour tout l'intérêt qu'il a porté à mes recherches. C'est grâce à ses précieux conseils que j'ai pu établir, en toute rigueur, certains points délicats d'analyse pure, ou, dans des circonstances plus difficiles, préciser nettement la difficulté.

Casimir MONTEIL.

PREMIÈRE PARTIE

CIRCULATION DE GAZ CHAUDS DANS UNE CHEMINÉE A SECTION RECTANGULAIRE DONT DEUX FACES OPPOSÉES SEULES SONT PERMÉABLES A LA CHALEUR

§ I. — Détermination du problème

1. — D'après les conditions du titre ci-dessus, le problème est ramené à la conception théorique d'une lame de gaz indéfinie dans un sens, et circulant dans le sens de la verticale ascendante entre

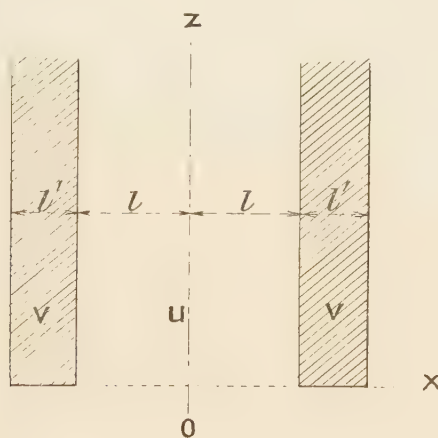


Fig. 1.

deux plans parallèles d'épaisseur constante l' et distants de $2l$. Prenons pour axe des x la direction perpendiculaire à la lame gazeuse,

et pour axe des z une verticale quelconque située dans le plan moyen. L'origine des coordonnées est placée dans la section droite d'entrée des gaz.

Pour achever de déterminer le problème, nous supposons :

1° Que les gaz sortant du foyer, entrent dans la cheminée, par le plan $z = 0$, à une température donnée T , uniforme dans toute la section, et qui est celle du foyer.

2° Que les deux murs verticaux entre lesquels circule la lame gazeuse sont, par leurs rectangles de base $z = 0$, en communication avec les gaz sortant du foyer et se dirigeant vers l'entrée de la cheminée. Ainsi donc, depuis $(x) = l$ jusqu'à (x) très voisin de $l + l'$, on pourra supposer la température des parois sensiblement égale à T ; mais sur la bande étroite voisine de l'extérieur, on ne peut faire autrement que d'admettre un abaissement rapide de la température, sous l'influence de la convection extérieure.

Quoi qu'il en soit, nous supposons pour déterminer notre problème analytique, que cette température des murs, dans le plan $z = 0$, est connue en chaque point.

3° Que le tirage de la cheminée donne naissance pour chaque molécule gazeuse à une vitesse ω , uniforme pour toutes les molécules d'une même section.

4° La cheminée a une hauteur finie H , en fonction de laquelle se calculera le tirage ω ; mais nous supposons que la sortie des gaz dans l'atmosphère extérieure n'apporte aucune discontinuité dans le phénomène, ce qui nous permettra de prolonger idéalement le phénomène jusqu'au refroidissement complet, censé obtenu pour z infini.

5° Les quantités C , chaleur spécifique de l'unité de volume, et ω vitesse des molécules, varient l'une en raison inverse, l'autre en raison directe du binôme de dilatation ; leur produit $C\omega$ peut donc être considéré comme sensiblement constant.

6° Le phénomène est étudié quand il a acquis un état stationnaire, c'est-à-dire, quand les températures aux divers points d'une section droite, soit dans les murs verticaux, soit dans les particules gazeuses qui traversent en tous temps cette section droite, sont devenues indépendantes du temps.

§ II. — Etablissement des équations indéfinies du problème

2. — 1° **Pour les gaz.** — La température u de chaque particule gazeuse, sera fonction des deux coordonnées x, z . La première, x , indique le filet vertical auquel la particule appartient, depuis son entrée dans la cheminée. La seconde, z , indique à quelle hauteur la particule se trouve, au moment où on la considère.

Faisons usage de la formule (1), citée dans l'introduction. Ici

$$\theta' = w \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{et} \quad \Delta_2 \theta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

et la formule (1) donne par conséquent,

$$(2) \quad w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{k}{C} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Mais nous pouvons nous dispenser d'écrire le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, à cause de son extrême petitesse, relativement au terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. En effet, les gaz se refroidissent vers la périphérie, très rapidement, à cause de leur contact avec la paroi verticale, que la convection de l'air extérieur maintient à l'état de paroi froide ; mais ce refroidissement se propage très lentement vers l'intérieur des filets gazeux, à cause de l'extrême petitesse de leur conductibilité intérieure. Donc de $x = 0$ à $x = l$, la température variera très rapidement, en suivant une loi très différente du premier degré, ce qui assure l'importance du terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Au contraire, du bas en haut de la cheminée, u variera lentement, et toujours dans le même sens. La loi $u(x_0, z)$ du refroidissement d'une même molécule doit donc être représentée par une courbe très peu éloignée partout de ses tangentes, ce qui assure la petitesse du terme $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Si nous convenons de négliger ce terme, l'équation indéfinie qui régit la fonction u , si l'on pose

$$(3) \quad a^2 = \frac{k}{Cw},$$

s'écrit :

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cette équation n'exprime certainement pas la réalité des faits dans les sections voisines de $z=0$, car le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} y$ est très faible et comparable au terme $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Elle est également en défaut pour les très grandes valeurs de z où s'est déjà effectué le nivellement des températures. Mais elle convient bien depuis $z = \varepsilon$, ε étant une petite quantité positive, jusqu'à $z = H$, c'est-à-dire pendant la presque totalité du trajet où le phénomène est étudié.

3. — 2° **Pour les murs verticaux.** — Soit v la température stationnaire d'un point intérieur de chacun de ces murs. On sait que v est régie par l'équation de Laplace :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

§ III. — Etablissement des équations définies du problème

4. — Nous avons déjà appelé k la conductibilité intérieure des gaz de la cheminée ; nous appellerons k' le même coefficient de la substance (maçonnerie ou tôle de fer) constituant les murs verticaux. Nous appellerons h le coefficient de conductibilité extérieure de ces murs, ce coefficient étant déduit des éléments de la convection extérieure par les formules récentes de M. Boussinesq ⁽¹⁾.

Si nous posons $\beta = \frac{h}{k'}$, la condition de rayonnement dans l'atmosphère extérieure supposée à 0° sera :

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial x} \pm \beta v = 0 \quad \text{pour } x = \pm (l + l') \text{ et quel que soit } z.$$

Les conditions de raccordement calorifique sur les faces $x = \pm l$, entre les gaz et les parois verticales intérieures, sont :

$$(7) \quad u = v$$

$$(8) \quad k \frac{\partial u}{\partial x} = k' \frac{\partial v}{\partial x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } x = \pm l, \\ \text{quel que soit } z. \end{array} \right.$$

Les conditions de symétrie exigent que :

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0, \text{ quel que soit } z.$$

(1) Voir par exemple : *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (1905).

Enfin, pour $z = \infty$, on doit avoir :

$$(10) \quad v(x, \infty) = 0$$

Et pour $z = 0$:

$$(11) \quad \begin{cases} u(x, 0) = T \\ v(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

$v_0(x)$ étant sensiblement égal à T depuis le bord intérieur jusque tout près du bord extérieur, où $v_0(x)$ décroît rapidement suivant une loi supposée connue.

§ IV. — Intégration du système des équations établies dans les paragraphes précédents

5. — Pour satisfaire aux équations indéfinies (4) et (5), et à la condition (10), nous prendrons

$$\begin{aligned} u &= \sum (A \cos mx + B \sin mx) e^{-a^2 m^2 z}, \\ v &= \sum (A' \cos a^2 m^2 x + B' \sin a^2 m^2 x) e^{-a^2 m^2 z}. \end{aligned}$$

A cause de la condition de symétrie (9), les B doivent être tous nuls ; u est alors une fonction paire en x , et pouvant ainsi définir la température du gaz depuis $x = -l$ jusqu'à $x = +l$.

Quant aux B' , rien n'indique leur annulation, les deux murs étant entièrement distincts. Nous calculerons donc les B' pour le mur situé du côté des x positifs ; nous nous souviendrons que cette fonction v représente seulement la température dans ce mur, la température de l'autre s'obtiendra en changeant le signe des B' dans l'expression de v .

Substituant les valeurs de u , v , dans la première condition définie (6), et annulant le coefficient de chaque exponentielle, il vient une relation entre A' et B' , qui détermine chacun de ces coefficients en fonction d'un troisième coefficient indéterminé C .

On a ainsi

$$\begin{aligned} u &= \sum A \cos mx e^{-a^2 m^2 z} \\ v &= \sum C [a^2 m^2 \cos a^2 m^2 (l + l' - x) + \beta \sin a^2 m^2 (l + l' - x)] e^{-a^2 m^2 z}. \end{aligned}$$

Portant ces deux expressions dans la condition de raccordement (7),

et annulant le coefficient de chaque exponentielle, on a une relation entre Λ et C qui détermine chacun d'eux en fonction d'un nouveau coefficient indéterminé M .

Il vient ainsi :

$$(12) \quad \begin{cases} u = \sum M(a^2 m^2 \cos a^2 m^2 l' + \beta \sin a^2 m^2 l') \cos mx e^{-a^2 m^2 z} \\ v = \sum M \cos ml [a^2 m^2 \cos a^2 m^2 (l + l' - x) + \beta \sin a^2 m^2 (l + l' - x)] e^{-a^2 m^2 z} \end{cases}$$

Enfin, portant ces expressions (12) dans la deuxième condition de raccordement (8), on a l'équation transcendante dont les racines seront les valeurs m à introduire dans les formules (12)

$$(13) \quad k(a^2 m^2 \cos a^2 m^2 l' + \beta \sin a^2 m^2 l') m \sin ml + k' m^2 \cos ml (a^4 m^2 \sin a^2 m^2 l' - \beta a^2 \cos a^2 m^2 l') = 0.$$

Il nous reste à déterminer les M de façon à ce que les fonctions u, v puissent pour $z=0$ reproduire les valeurs initiales qui leur sont imposées par les conditions (11).

6. — Calcul des M . — Posons

$$(14) \quad \begin{cases} U = (a^2 m^2 \cos a^2 m^2 l' + \beta \sin a^2 m^2 l') \cos mx \\ V = \cos ml [a^2 m^2 \cos a^2 m^2 (l + l' - x) + \beta \sin a^2 m^2 (l + l' - x)]. \end{cases}$$

les formules (12) s'écrivent alors

$$(15) \quad \begin{cases} u = \sum M U e^{-a^2 m^2 z} \\ v = \sum M V e^{-a^2 m^2 z} \end{cases}$$

et les conditions (11) reviennent maintenant à déterminer les coefficients M communs aux deux développements.

$$(16) \quad \begin{cases} T = \sum M U \\ v_0(x) = \sum M V \end{cases}$$

La méthode d'élimination de Fourier est ici en défaut. On sait, en effet, qu'elle repose toute entière sur la propriété suivante : *le produit de deux solutions simples a sa valeur moyenne dans tout le système égale à 0*.

Cette propriété subsiste même dans le cas du refroidissement d'un corps composé de la juxtaposition de parties hétérogènes. On peut citer à ce sujet le deuxième mémoire de Poisson « *sur le mouvement de la chaleur dans un corps solide formé de deux noyaux sphériques concentriques* » ⁽¹⁾. Enfin, M. Boussinesq, en exposant

(1) POISSON. — 19^e Cahier du Journal de l'École Polytechnique.

dans les XV^e et XVI^e leçons de sa « Théorie analytique de la chaleur », la méthode d'élimination de Fourier, donne une démonstration très générale de cette propriété, comprenant le cas du corps hétérogène.

Chaque fois que la méthode d'élimination, dont il vient d'être parlé, réussit, chaque coefficient M ne dépend que du paramètre m qu'il accompagne.

Mais dans notre problème, à cause sans doute de la disparité des deux équations indéfinies, chaque coefficient dépendra de la totalité des paramètres m , racines de l'équation transcendante (13).

Et ce fait est mis en évidence par la formule fondamentale que nous allons établir, *et suivant laquelle se généralise la relation de Fourier*.

7. — **Etablissement d'une formule fondamentale.** — Considérons dans les solutions générales u, v , exprimées par les formules (15), les deux solutions simples $MUe^{-a^2m^2z}$ et $MVe^{-a^2m^2z}$ correspondant au paramètre m . Ces solutions satisfont à toutes les conditions du problème, sauf les conditions (11). En exprimant ce fait, on a le système des équations suivantes, dont les numéros rappellent les origines :

$$\left. \begin{aligned} (4') \quad & \frac{d^2U}{dx^2} + m^2U = 0 \\ (5') \quad & \frac{d^2V}{dx^2} + a^2m^2V = 0 \end{aligned} \right\} \text{équations indéfinies}$$

et les conditions définies

$$\left. \begin{aligned} (6') \quad & \frac{dV}{dx} + \beta v = 0 && \text{pour } x = l + l' \\ (7') \quad & U = V \\ (8') \quad & k \frac{dU}{dx} = k' \frac{dV}{dx} && \left. \vphantom{\begin{aligned} (7') \\ (8') \end{aligned}} \right\} \text{pour } x = l \\ (9') \quad & \frac{dU}{dx} = 0 && \text{pour } x = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient, d'autre part, U_1 et V_1 les facteurs entrant dans les deux solutions relatives à un autre paramètre m_1 .

De l'équation (4') on tire

$$-m^2 \int_0^l UU_1 dx = \left(U_1 \frac{dU}{dx} \right)_0^l - \int_0^l \frac{dU}{dx} \frac{dU_1}{dx} dx,$$

et en permutant le rôle de m et m_1 ,

$$-m_1^2 \int_0^l U U_1 dx = \left(U \frac{dU_1}{dx} \right)_0^l - \int_0^l \frac{dU}{dx} \frac{dU_1}{dx} dx,$$

d'où, par soustraction,

$$(m^2 - m_1^2) \int_0^l U U_1 dx = \left(U \frac{dU_1}{dx} - U_1 \frac{dU}{dx} \right)_0^l.$$

Par un calcul analogue, on tire de l'équation (5')

$$a^4(m^4 - m_1^4) \int_l^{l+l'} V V_1 dx = \left(V \frac{dV_1}{dx} - V_1 \frac{dV}{dx} \right)_l^{l+l'}.$$

En combinant les deux résultats précédents, on trouve

$$k(m^2 - m_1^2) \int_0^l U U_1 dx + a^4 k' (m^4 - m_1^4) \int_l^{l+l'} V V_1 dx = k \left(U \frac{dU_1}{dx} - U_1 \frac{dU}{dx} \right)_0^l + k' \left(V \frac{dV_1}{dx} - V_1 \frac{dV}{dx} \right)_l^{l+l'}.$$

Le deuxième membre est nul. En effet :

$$\left(V \frac{dU_1}{dx} - U_1 \frac{dV}{dx} \right)_0 = 0 \quad \text{en vertu de (9')} \\ \left(V \frac{dV_1}{dx} - V_1 \frac{dV}{dx} \right)_l^{l+l'} = 0 \quad \text{en vertu de (6')}$$

et les deux parenthèses restantes se détruisent, à cause des relations de raccordement (7') et (8').

Il reste donc, après division par le facteur $m^2 - m_1^2$, la formule fondamentale :

$$(17) \quad k \int_0^l U U_1 dx + a^4 k' (m^2 + m_1^2) \int_l^{l+l'} V V_1 dx = 0,$$

relation ayant lieu entre les solutions simples *relatives à deux paramètres différents quelconques* m et m_1 .

C'est la présence de deux paramètres m et m_1 dans la formule fondamentale, qui nous montre que les coefficients M ne pourront pas se séparer, à la façon de ceux de Fourier.

8. — Nous allons faire une combinaison qui mettra bien en lumière de quelle façon chaque coefficient M dépend de tous les

paramètres m des exponentielles, lesquels paramètres sont les racines en nombre infini, de l'équation transcendante (13)

Posons

$$u = M U e^{-a^2 m^2 z} + \sum M_i U_i e^{-a^2 m_i^2 z},$$

$$v = M V e^{-a^2 m^2 z} + \sum M_i V_i e^{-a^2 m_i^2 z},$$

les m_i comprenant tous les paramètres, sauf celui m , qui est mis en avant. On doit avoir, pour $z = 0$,

$$T = MU + \sum M_i U_i,$$

$$v_0(x) = MV + \sum M_i V_i.$$

Posons, en outre

$$\varphi(x) = m^2 MV + \sum m_i^2 M_i V_i.$$

De ces 3 équations, on tire facilement la combinaison

$$kT \int_0^l U dx + k' a^4 m^2 \int_l^{l+l'} v_0 V dx + k' a^4 \int_l^{l+l'} \varphi(x) V dx = M \left\{ k \int_0^l U^2 dx + 2k' a^4 m^2 \int_l^{l+l'} V^2 dx \right\},$$

les termes non écrits étant tous nuls, en vertu de la relation fondamentale (17).

De la relation précédente, on tire :

$$(18) \quad M = \frac{kT \int_0^l U dx + k' a^4 \int_l^{l+l'} V [m^2 v_0 + \varphi(x)] dx}{k \int_0^l U^2 dx + 2k' a^4 m^2 \int_l^{l+l'} V^2 dx}.$$

or, d'après l'expression ci-dessus de $\varphi(x)$, on voit que cette quantité dépend de tous les m ; donc, les coefficients M en dépendent aussi.

9. — Il est curieux de remarquer que le terme $\varphi(x)$ est à un facteur constant près, le flux entrant dans le mur vertical, par son rectangle de base $z = 0$. Si donc on pouvait évaluer ce flux, le problème de la détermination des M serait résolu. Mais, il ne peut faire partie des données, ni être évalué approximativement, étant très variable depuis $x = l$, jusqu'à $x = l + l'$, en partant de 0, et devenant très grand.

Ce calcul n'a donc été fait que pour montrer, d'une façon sensible, l'influence des paramètres de toutes les exponentielles sur la valeur de chacun des coefficients M .

10. — Nous sommes parvenu à donner du dénominateur de la formule (18) une intéressante interprétation graphique, en généralisant les procédés de calcul employés par M. Boussinesq, page 251, tome I, de sa *Théorie analytique de la chaleur*, pour la simplification du dénominateur dans le procédé d'élimination de Fourier.

Soient encore U, V , les facteurs considérés au n° 7, et soient u, v , deux fonctions continues dans les intervalles respectifs 0 à l , l à $l+l'$. On tire des équations (4') et (5'), (n° 7)

$$\begin{aligned} m^2 \int_0^l U u dx &= \left(u \frac{dU}{dx} \right)_0^l - \int_0^l \frac{dU}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} dx \\ - a' m^2 \int_l^{l+l'} V v dx &= \left(v \frac{dV}{dx} \right)_l^{l+l'} - \int_l^{l+l'} \frac{dV}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} dx. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (z) \quad k m^2 \int_0^l U u dx + k' a' m^2 \int_l^{l+l'} V v dx &= k \int_0^l \frac{dU}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} dx + k' \int_l^{l+l'} \frac{dV}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} dx \\ &\quad - k \left(u \frac{dU}{dx} \right)_0^l - k' \left(v \frac{dV}{dx} \right)_l^{l+l'}. \end{aligned}$$

Soient U', V' satisfaisant aux mêmes conditions que U et V , sauf à la dernière condition de raccordement (8). Les U' et V' auront alors mêmes expressions respectivement que les U et les V sauf que les m y seront arbitraires, ce qui nous amène à remplacer la lettre m qui implique des valeurs définies par la lettre p qui représente une variable pouvant varier avec continuité.

Pour $p = m$ les fonctions U', V' reproduiront les fonctions U, V .

Cela posé, si l'on associe à ces deux fonctions U' et V' deux fonctions continues quelconques u' et v' , on aura une relation (β) qu'on déduit de la relation (α) ci-dessus en remplaçant m, U, u, V, v , respectivement par p, U', u', V', v' .

Les fonctions u, v, u', v' , ont été laissées arbitraires jusqu'ici. Faisons maintenant dans les relations (α) et (β)

$$u = U' \quad v = V' \quad u' = U \quad v' = V$$

et cela fait, retranchons membre à membre ces deux relations.

Il vient :

$$\begin{aligned} k(p^2 - m^2) \int_0^l U U' dx + k' a' (p^2 - m^2) \int_l^{l+l'} V V' dx &= k \left(U \frac{dU}{dx} - U \frac{dU'}{dx} \right)_0^l \\ &\quad + k' \left(V \frac{dV}{dx} - V \frac{dV'}{dx} \right)_l^{l+l'} \end{aligned}$$

on a d'abord

$$\left(U' \frac{dU}{dx} - U \frac{dU'}{dx} \right)_0 = 0 \quad \text{à cause de (9')}$$

$$\left(V' \frac{dV}{dx} - V \frac{dV'}{dx} \right)_{l+l} = 0 \quad \text{à cause de (6')}$$

puis, pour $x=l$, on a $U=V$, $U'=V'$

$$k \frac{dU}{dx} = k' \frac{dV}{dx}, \quad k \frac{dU'}{dx} \quad \text{pouvant être différent de} \quad k' \frac{dV'}{dx}.$$

Il reste donc dans le second membre la quantité

$$U \left(k' \frac{dV'}{dx} - k \frac{dU'}{dx} \right)_{x=l}.$$

En retranchant à ce second membre la quantité nulle

$$U \left(k' \frac{dV'}{dx} - k \frac{dU'}{dx} \right)_{x=l}$$

et en divisant par $p-m$ les 2 membres, on a

$$k(p+m) \int_0^l U U' dx + k' a^4 (p+m)(p^2+m^2) \int_l^{l+l} V V' dx = U(l) \left\{ \frac{k' \left(\frac{dV'}{dx} - \frac{dV}{dx} \right)}{p-m} - \frac{\left(k \frac{dU'}{dx} - \frac{dU}{dx} \right)}{p-m} \right\}_{x=l}$$

Faisons tendre p vers la valeur m correspondant aux solutions simples U , V . Il viendra

$$2m \left(k \int_0^l U^2 dx + 2m^2 a^4 k' \int_l^{l+l} V^2 dx \right) = U(l) \left\{ \frac{\partial}{\partial m} \left(k' \frac{dV'}{dx} - k \frac{dU}{dx} \right) \right\}_{x=l}.$$

or le crochet du premier membre est précisément le dénominateur dans (18). L'expression cherchée de ce dénominateur est donc

$$\frac{U(l)}{2m} \frac{\partial}{\partial m} \left(k' \frac{dV'}{dx} - k \frac{dU}{dx} \right)_{x=l}.$$

Or, pour déterminer graphiquement les racines m de l'équation (13) on sera amené à construire la courbe

$$y = \left(k' \frac{dV'}{dx} - k \frac{dU}{dx} \right)_{x=l},$$

où l'on prendra comme abscisses les valeurs de la variable m , supposée variant d'une manière continue de 0 à l'infini. Les points où cette courbe coupe l'axe des x , ont des abscisses repré-

sentant les valeurs successives des paramètres m à introduire dans les solutions simples. Et le coefficient angulaire de la tangente en chacun de ces points, représentera précisément la quantité

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(k' \frac{dV}{dx} - k \frac{dU}{dx} \right)_{x=l}$$

qu'il s'agissait d'interpréter.

11. — **Calcul des M par la méthode des moindres carrés.** — Nous allons d'abord faire quelques remarques sur l'application de cette méthode telle que la propose M. Boussinesq, dans son tome I^{er}, page 316, de sa *Théorie analytique de la chaleur*.

Soit à chercher les coefficients du développement ΣcU de façon que ce développement représente une fonction donnée u_0 , dans l'intérieur d'une région ω .

« Comme on doit avoir partout $u_0 - \Sigma cU = 0$, l'intégrale essentiellement positive $I = \int_{\omega} C(u_0 - \Sigma cU)^2 d\omega$, expression à un facteur constant près C (capacité calorifique), du carré moyen de l'écart $u_0 - \Sigma cU$ dans tout le système, comporte alors un minimum nul, réalisé précisément par les valeurs cherchées des inconnues c . Des lors, si l'on arrête la série convergente ΣcU après son $(n+1)^{\text{eme}}$ terme, l'écart $u_0 - \Sigma cU$ est seulement très petit et non plus nul, l'intégrale I , très peu supérieure à 0, sera, par le fait même, fort voisine du minimum positif qu'elle continue évidemment à admettre. Et les valeurs cherchées des coefficients c différeront peu de celles qui la rendraient minimum ou qui donneraient, en la différentiant par rapport à l'une quelconque c' de ces $(n+1)$ inconnues les $n+1$ équations du 1^{er} degré comprises dans la formule

$$c_0 \int_{\omega} CU_0 U' d\omega + c_1 \int_{\omega} CU_1 U' d\omega + \dots + c_n \int_{\omega} CU_n U' d\omega = \int_{\omega} Cu_0 U' d\omega$$

« où U' est successivement $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$. »

L'observation que suggère cet exposé ⁽¹⁾ est relative à la présence du coefficient C (capacité calorifique) dans ces formules. On aurait pu aussi, semble-t-il, partir de l'intégrale

$$\int_{\omega} (u_0 - \Sigma cU)^2 d\omega.$$

(1) M. BOUSSINESQ. — *Théorie analytique de la chaleur*, tome I, page 316,

(Il ne faut pas oublier qu'il s'agit ici d'une méthode d'approximation; deux procédés différents peuvent donc être tous les deux valables, l'un pouvant toutefois serrer de plus près la vérité.)

Faisons d'abord remarquer que si le volume ω est rempli d'une substance homogène, C aura la même valeur en tous les points, et par suite disparaîtra des équations finales. Mais si le volume est hétérogène, les diverses valeurs de C persistent dans le résultat final, et influent sur les valeurs de ces résultats. L'une des raisons qui a conduit M. Boussinesq à introduire le facteur C dans l'intégrale I apparaît dans le dernier alinéa de son exposé: « Quand le produit moyen de deux solutions simples quelconques est nul, on retombe sur le procédé de Fourier..... »

C'est donc pour que la méthode des moindres carrés reproduise, dans un cas particulier, la méthode d'élimination de Fourier, que ce coefficient C a été introduit ⁽¹⁾.

12. — Mais nous n'avons pas, dans notre problème, la même raison pour introduire ce facteur, car il ne se présente pas seulement ici l'hétérogénéité de la matière, mais encore celle des équations différentielles qui régissent la température dans les deux parties, gaz et mur. Il n'y a donc pas lieu ici de faire exprimer convenablement à la méthode des moindres carrés un cas limite qui ne peut pas exister.

Au contraire, cette introduction du facteur C présente dans le cas que nous étudions, un sérieux inconvénient. Nous avons appelé C et C' les valeurs respectives du coefficient C dans le gaz et le mur; l'intégrale I serait donc ici

$$C \int_0^l (u_0 - \Sigma MU)^2 dx + C' \int_l^{l+v} (v_0 - \Sigma MV)^2 dx.$$

Pour un minimum de cette intégrale, il est à craindre, à cause de la petitesse du coefficient C dans les gaz, que l'écart $u_0 - \Sigma MU$ soit notable; en revanche, à cause de la prépondérance de C' l'écart $v_0 - \Sigma MV$ serait faible. Mais on conçoit qu'il vaut bien mieux que la fonction u , exprimant la température des gaz, se conforme bien à la valeur initiale u_0 qu'elle doit prendre à l'entrée de la cheminée; car à cause de la faible conductibilité des gaz, les irrégularités du début mettraient longtemps à disparaître. Au contraire, un écart dans les quantités

(1) La raison principale est de faire compter chaque molécule proportionnellement à sa capacité calorifique.

correspondantes du mur, produira des irrégularités vite nivellées, par la grande conductibilité de la substance composant ce mur.

En reprenant les notations des formules (16), nous calculerons donc les coefficients M de façon à rendre minimum l'intégrale

$$\int_0^l \left(u_0 - \sum M U \right)^2 dx + \int_l^{l+l'} \left(v_0 - \sum M V \right)^2 dx$$

Ce minimum sera obtenu pour les valeurs de M qui satisferont les n équations du premier degré, qu'on obtient en faisant successivement U' et V' égaux à $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$, dans l'équation

$$(19) \quad \sum_{i=1}^{i=n} M_i \left(\int_0^l U_i U' dx + \int_l^{l+l'} V_i V' dx \right) = \int_0^l u_0 U' dx + \int_l^{l+l'} v_0 V' dx.$$

n étant le nombre de termes pris dans les séries.

Les M étant ainsi calculés, on vérifiera que les séries ΣMU et ΣMV concordent suffisamment avec les valeurs u_0 et v_0 . Si l'écart est trop considérable, il y aurait lieu d'augmenter le nombre n .

13. — Le problème est achevé. On porte les valeurs des coefficients M dans les formules (12) où l'on remplace aussi les m successifs par les n premières racines positives de l'équation transcendante (13), prises dans l'ordre de grandeur.

Les fonctions u, v satisfont alors à toutes les équations du problème, à cela près qu'elles ne satisfont qu'approximativement aux deux conditions (11).

Mais quand un phénomène est considéré entre des limites ne comprenant aucune discontinuité physique, la quasi concordance des données entraîne celle des résultats.

Néanmoins, il y aura lieu de vérifier que les expressions définitives obtenues ΣMU et ΣMV , relatives à la base $z = 0$, diffèrent très peu, en tous les points de cette base, des valeurs assignées à l'avance. Les applications numériques ci-après portent à penser qu'il en sera bien ainsi.

On peut donc dire que nous avons donné, pour le problème, un moyen d'approcher du résultat aussi près qu'on le désirera, et dont la puissance d'approximation n'est limitée que par la patience du calculateur.

§ V. — **Premier exemple d'application numérique, où les constantes du problème sont prises égales à l'unité, et où l'on emploie la méthode des moindres carrés pour le calcul des coefficients.**

14. — Dans cette première application numérique, nous donnerons aux constantes physiques et aux grandeurs de l'appareil des valeurs simples, sans nous soucier des vraies valeurs de ces quantités dans les appareils industriels. Nous ne bénéficions ainsi d'aucune des grandes simplifications qu'apporte l'usage de ces dernières valeurs, dont quelques-unes sont très petites par rapport à d'autres. L'application n'aura donc qu'un sens purement théorique, mais qui montrera dans tous ses détails le jeu de nos formules.

Pour alléger un peu les calculs, supposons que la convection de l'atmosphère extérieure étant très grande, on puisse prendre β infini; ce qui revient à supposer que les parois extérieures $x = \pm (l + l')$ sont maintenues à 0^0 .

Les formules (12) et (13) deviennent alors :

$$(20) \quad \begin{cases} u = \sum M \sin a^2 m^2 l' \cos m x e^{-a^2 m^2 z} \\ v = \sum M \cos m l \sin a^2 m^2 (l + l' - x) e^{-a^2 m^2 z} \end{cases}$$

$$(21) \quad k m \sin m l \sin a^2 m^2 l' = k' a^2 m^2 \cos m l \cos a^2 m^2 l'$$

L'équation (21) admet la racine $m = 0$ qui donne dans u, v deux solutions simples nulles. Il le faut bien, car ces deux solutions simples représentent les limites de u, v pour $z = \infty$, et ces limites sont nécessairement nulles. Elle admet ensuite une infinité de racines réelles, deux à deux égales et de signes contraires, mais il suffit évidemment de considérer les racines positives.

15. — Convenons de faire $k = k' = a^2 = 1$; $l = l' = 1$; les formules (20) et (21) deviennent

$$(22) \quad \begin{cases} u = \sum M \sin m^2 \cos m x e^{-m^2 z} \\ v = \sum M \cos m \sin m^2 (2 - x) e^{-m^2 z} \end{cases}$$

$$(23) \quad \sin m \sin m^2 = m \cos m \cos m^2$$

qui peut encore s'écrire

$$(23') \quad \operatorname{tg} m = m \cotg m^2.$$

Les trois premières racines de cette équation sont :

$$m_1 = 0,810 \dots \quad m_2 = 1,706 \dots \quad m_3 = 2,277 \dots$$

En portant ces valeurs dans les équations (22), on obtient.

$$\begin{cases} u = M_1 \times 0,61003 \cos 0,810 x e^{-0,6561z} + M_2 \times 0,22911 \cos 1,706 x e^{-2,9104z} \\ \quad - M_3 \times 0,8905 \cos 2,277 x e^{-5,4847z} + \dots \\ v = M_1 \times 0,6895 \sin 0,810 x (2-x) e^{-0,6561z} - M_2 \times 0,1347 \sin 1,706 x (2-x) e^{-2,9104z} \\ \quad - M_3 \times 0,6489 \sin 2,277 x (2-x) e^{-5,4847z} + \dots \end{cases}$$

L'application de la méthode des moindres carrés nous amène à résoudre le système des trois équations :

$$\begin{aligned} T \left[\int_0^l U_1 dx + \int_l^{l+l'} V_1 dx \right] &= M_1 \left[\int_0^l U_1^2 dx + \int_l^{l+l'} V_1^2 dx \right] + M_2 \left[\int_0^l U_1 U_2 dx + \int_l^{l+l'} V_1 V_2 dx \right] \\ &\quad + M_3 \left[\int_0^l U_1 U_3 dx + \int_l^{l+l'} V_1 V_3 dx \right]. \\ T \left[\int_0^l U_2 dx + \int_l^{l+l'} V_2 dx \right] &= M_1 \left[\int_0^l U_1 U_2 dx + \int_l^{l+l'} V_1 V_2 dx \right] + M_2 \left[\int_0^l U_2^2 dx + \int_l^{l+l'} V_2^2 dx \right] \\ &\quad + M_3 \left[\int_0^l U_2 U_3 dx + \int_l^{l+l'} V_2 V_3 dx \right]. \\ T \left[\int_0^l U_3 dx + \int_l^{l+l'} V_3 dx \right] &= M_1 \left[\int_0^l U_1 U_3 dx + \int_l^{l+l'} V_1 V_3 dx \right] + M_2 \left[\int_0^l U_2 U_3 dx + \int_l^{l+l'} V_2 V_3 dx \right] \\ &\quad + M_3 \left[\int_0^l U_3^2 dx + \int_l^{l+l'} V_3^2 dx \right]. \end{aligned}$$

On voit que l'on a pris la fonction $v_o(x) = T$ depuis $x = l$ jusqu'à $x = l + l'$. C'est une petite erreur, car v_o ne peut égaler T que depuis $x = l$ jusqu'à une petite distance du bord extérieur $x = l + l'$, à partir de laquelle v_o décroît rapidement de T jusqu'à 0.

Mais cette approximation ne peut modifier sensiblement les valeurs des intégrales où entre v_o .

Les coefficients de cette équation ont été calculés avec tout le soin désirable. Dans ces calculs, une vérification nous est fournie par la formule fondamentale (17) qui s'écrit ici :

$$\int_0^l U_i U_j dx + (m_i^2 + m_j^2) \int_l^{l+l'} V_i V_j dx = 0 \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3. \\ j = 1, 2, 3. \\ i \neq j. \end{cases}$$

on a calculé séparément les deux intégrales définies de cette formule, et, au lieu de 0, on a trouvé :

$$\begin{array}{lll} \text{Pour } i=2 & j=3 & 0,001 \\ - & i=3 & j=1 & 0,000\ 08 \\ - & i=1 & j=2 & 0,000\ 69. \end{array}$$

Les trois équations en M_1, M_2, M_3 , admettent pour racines

$$M_1 = 2,514\ T \quad M_2 = -3,837\ T \quad M_3 = -0,450\ T$$

d'où en portant dans les formules (24) les résultats définitifs :

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} u = T(1,5335 \cos 0,810\ x e^{-0,6561z} - 0,879 \cos 1,706\ x e^{-2,9104z} + 0,4 \cos 2,277\ x e^{-5,1847z}) \\ v = T(1,733 \sin 0,6561(2-x)e^{-0,6561z} + 0,518 \cos 2,9104(2-x)e^{-2,9104z} \\ \quad + 0,292 \sin 5,1847(2-x)e^{-5,1847z}, \dots). \end{array} \right.$$

Ces fonctions u, v satisfont à toutes les conditions indéfinies ou finies du problème, sauf que pour $z = 0$, elles ne reproduisent pas rigoureusement les valeurs initiales qui leur conviennent. Il faut donc vérifier par un calcul direct que $u(x, 0)$ reste très voisin de T depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, et que $v(x, 0)$ reste très voisin de T depuis $x = l$ jusque vers le bord $x = l + l$, où il décroît vers 0.

La vérification directe donne les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } x=0, & u = 1,054\ T \\ \text{» } x=\frac{l}{3}, & u = 1,030\ T \\ \text{» } x=\frac{l}{2}, & u = 0,998\ T \\ \text{» } x=\frac{2l}{3}, & u = 0,955\ T \\ \text{» } x=l, & u = 0,914\ T. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } x=l, & v = 0,915\ T \\ \text{» } x=l+\frac{l'}{10}, & v = 0,928\ T \\ \text{» } x=l+\frac{l'}{3}, & v = 1,128\ T \\ \text{» } x=l+\frac{2l'}{5}, & v = 1,180\ T \\ \text{» } x=l+\frac{l'}{2}, & v = 1,225\ T \\ \text{» } x=l+\frac{2l'}{3}, & v = 1,092\ T \\ \text{» } x=l+\frac{9l'}{10}, & v = 0,403\ T \\ \text{» } x=l+l', & v = 0. \end{array}$$

On voit que la fonction $u(x, 0)$ reproduit assez fidèlement dans l'intervalle $x = 0$ à $x = l$ la valeur T sauf que vers la paroi $x = l$, elle décroît jusqu'à 0,914 T .

Il est regrettable que la fonction $v(x, 0)$ présente un excès de valeur vers le milieu de la paroi. Chaque terme qu'on prendrait en sus des trois premiers, nivellerait cette crête au profit des régions avoisinant la paroi intérieure. Mais telles qu'elles sont ainsi calculées, les fonctions u, v deviendront, au fur et à mesure que z grandit, des approximations de plus en plus satisfaisantes.

16. — On peut aisément calculer la moyenne de la température dans une section. Si la section est à une hauteur $z = H$ suffisamment élevée, le premier terme sera prépondérant et pourra suffire à représenter la presque totalité de la fonction u . On aura alors

$$u = \text{sensiblement } M_1 \sin a^2 m_1^2 l' e^{-a^2 m_1^2 H}$$

et la moyenne de la température u dans cette section sera

$$\text{Moyenne de } u = \frac{M_1}{l} \sin a^2 m_1^2 l' e^{-a^2 m_1^2 H} \frac{\sin m_1 l}{m_1}.$$

On pourra ainsi connaître à chaque hauteur quelle est la dépense correspondante en calories. Nous nous réservons de faire une application numérique de ces dernières formules dans le cas plus intéressant où l'on attribue aux constantes du problème leurs grandeurs approximatives.

§ VI. — Examen du cas théorique où le rapport $\frac{k}{k'}$ des deux conductibilités est nul; étude de la convergence des développements obtenus par l'extension à ce cas de la méthode de Fourier.

17. — L'équation transcendante qui donne la suite des paramètres m devient alors

$$\cos ml \cos a^2 m^2 l' = 0$$

Les paramètres m se partageront en deux groupes distincts, les paramètres α , racines de l'équation

$$\cos ml = 0;$$

et les paramètres β , racines de l'équation

$$\cos a^2 m^2 l' = 0.$$

Si donc, on pose :

$$(26) \quad \begin{cases} U = \sin \alpha l \cos \alpha x \\ V = \cos \alpha l \sin a^2 \alpha^2 (l + l' - x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathcal{U} = \sin \beta l \cos \beta x \\ \mathcal{V} = \cos \beta l \sin a^2 \beta^2 (l + l' - x) \end{cases}$$

les fonctions u, v , pourront s'écrire, en remarquant que les facteurs V sont tous nuls, à cause de la présence de $\cos \alpha l$ dans leur expression, et en désignant respectivement par M et N les coefficients relatifs aux paramètres α et β ,

$$(27) \quad \begin{cases} u = \sum_{\alpha} M U e^{-a^2 \alpha^2 z} + \sum_{\beta} N \mathcal{U} e^{-a^2 \beta^2 z} \\ v = \sum_{\beta} N \mathcal{V} e^{-a^2 \beta^2 z} \end{cases}$$

On doit donc déterminer les coefficients M et N par la condition qu'on ait, pour $z = 0$,

$$(28) \quad u_0 = \sum_{\alpha} M U + \sum_{\beta} N \mathcal{U}$$

$$(29) \quad v_0 = \sum_{\beta} N \mathcal{V}.$$

18. — Nous allons d'abord déterminer les coefficients N du développement (29). Si l'on désigne par V_i, V_j , les deux facteurs V correspondant à deux paramètres différents β_i, β_j , on vérifie aisément la relation

$$\int_l^{l+l'} \mathcal{V}_i \mathcal{V}_j dx = 0.$$

Sous la réserve d'une étude plus approfondie, la méthode de Fourier va donc s'appliquer au calcul des N du développement (29), et donnera pour la valeur de ces coefficients

$$N = \frac{\int_l^{l+l'} v_0 \mathcal{V} d\mu}{\int_l^{l+l'} \mathcal{V}^2 d\mu} = \frac{2}{l' \cos \beta l} \int_l^{l+l'} v_0(\mu) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l'} (l + l' - \mu) d\mu,$$

ce qui fournit le développement

$$(30) \quad v_0(x) = \frac{2}{l'} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2l'} (l + l' - x) \int_l^{l+l'} v_0(\mu) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l'} (l + l' - \mu) d\mu \right).$$

Pour justifier la légitimité de ce développement, nous allons le rattacher à ceux que M. Picard déduit des théorèmes de Cauchy ⁽¹⁾.

Soient $\chi(z)$, $\pi(z)$, $f(z, y)$ trois fonctions holomorphes de la variable complexe z, y étant un paramètre réel.

Posons :

$$\psi(z) = \pi(z) - \chi(z).$$

Supposons que z tende vers l'infini, par des valeurs $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, de son module, telles que les circonférences admettant ces valeurs comme rayons, ne coupent aucun des pôles de la fonction méromorphe $\frac{\chi(z)f(z, y)}{\pi(z)}$; on peut aussi supposer que la partie réelle de z ne devient jamais négative.

La variable z devenant infinie, comme il vient d'être indiqué, supposons qu'ont ait :

$$\begin{aligned} \limite \frac{\chi(z)}{\pi(z)} &= 1, \limite \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} = 1, \limite \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(y-y_0)} = 0, \\ \limite \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(y_1-y)} &= 0. \end{aligned}$$

Supposons en outre que les racines de l'équation $\pi(z) = 0$ soient de la forme $z = \lambda i$, λ étant réel.

Dans ces conditions, le développement

$$(31) \quad f(y) = - \sum_{\lambda} \frac{\psi(\lambda i)}{\pi'(\lambda i)} \int_{y_0}^{y_1} e^{\lambda i(y-\mu)} f(\mu) d\mu,$$

où la sommation Σ s'étend à toutes les valeurs positives ou négatives de λ , est valable pour toute valeur y comprise entre y_0 et y_1 .

Pour retrouver par cette voie, le développement (30), prenons

$$\pi(z) = e^{2l'z} + 1, \psi(z) = 1 \text{ et par suite } \chi(z) = e^{2l'z}.$$

On aura, pour ce choix des fonctions holomorphes :

$$\begin{aligned} \limite \frac{\chi(z)}{\pi(z)} &= \limite \frac{e^{2l'z}}{e^{2l'z} + 1} = \limite \frac{1}{1 + e^{-2l'z}} = 1; \\ \limite \frac{\psi(-z)}{\pi(-z)} &= \limite \frac{1}{e^{-2l'z} + 1} = 1; \\ \limite \frac{\psi(z)}{\pi(z)} e^{z(y-y_0)} &= \limite \frac{e^{z(y-y_0-2l)}}{1 + e^{-2l'z}}. \end{aligned}$$

(1) PICARD. — *Cours d'Analyse*. Tome II. — Chapitre VI.

et cette limite sera nulle si

$$(32) \quad y - y_0 - 2l' < 0;$$

$$\limite \frac{\chi(-z)}{\pi(-z)} e^{z(y_1 - y)} = \limite \frac{e^{z(y_1 - y - 2l')}}{1 + e^{-2l'z}},$$

et cette limite est nulle, si l'on a

$$(33) \quad y_1 - y - 2l' < 0.$$

Prenons $y_0 = -l'$, $y_1 = l'$. Les inégalités (32) et (33) montrent que le développement

$$f(y) = \frac{1}{2l'} \sum_k \int_{-l'}^{+l'} e^{i(y-\mu)} f(\mu) d\mu$$

est valable depuis $-l'$ jusqu'à $+l'$.

Les racines de l'équation $e^{2l'z} + 1 = 0$ sont

$$z = \frac{2k+1}{2l'} \pi i \quad \text{d'où} \quad k = \frac{2k+1}{2l'} \pi - l' = \pm (0, 1, 2, \dots, \infty).$$

Si l'on convient de réunir dans le développement précédent, les deux termes qui correspondent à la même valeur absolue de k , c'est-à-dire le terme en $k = n$ avec celui en $k = -(n+1)$, ce développement devient,

$$f(y) = \frac{1}{l'} \sum_{k=0}^{k=\infty} \int_{-l'}^{+l'} \cos \frac{(2k+1)\pi(y-\mu)}{2l'} f(\mu) d\mu.$$

Supposons que la fonction $f(y)$ soit définie seulement depuis $y=0$ jusqu'à $y=l'$, et prolongeons son expression dans l'intervalle $y=0$ à $y=-l'$, suivant la loi

$$f(-y) = -f(y).$$

Le développement précédent se trouvera ainsi réduit à

$$f(y) = \frac{2}{l'} \sum_{k=0}^{k=\infty} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2l'} \int_0^{+l'} \sin \frac{(2k+1)\pi \mu}{2l'} f(\mu) d\mu.$$

Si maintenant on pose:

$$y = l' + l' - x \quad f(l' + l' - x) = v_0(x)$$

on retrouvera le développement (30) qui se trouve ainsi justifié en toute rigueur.

19. — Les coefficients N étant ainsi déterminés, nous portons leurs valeurs dans le développement (28), où ils vont constituer la série $\Sigma N\mathcal{U}$. Si cette série est convergente, pour x compris entre 0 et l , nous représenterons par $\varphi(x)$ la fonction qui exprime sa somme dans cet intervalle. Il ne restera plus qu'à déterminer les M pour satisfaire au développement.

$$u_0(x) - \varphi(x) = \Sigma MU.$$

Nous allons établir, pour un cas particulier, la convergence de la série $\Sigma N\mathcal{U}$. La méthode que nous allons suivre, et qui nous a été indiquée par M. Picard, a pour principe une idée utilisée par Liouville dans ses recherches arithmétiques relatives à la *distinction des nombres transcendants et des nombres algébriques*.

Il s'agit d'établir la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{2}{l'} \operatorname{tg} \frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} \int_l^{l+l'} v_0(\mu) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l'} (l+l'-\mu) d\mu.$$

Il suffit évidemment d'établir *l'absolue convergence* de la série

$$(34) \quad \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\int_l^{l+l'} v_0(\mu) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l'} (l+l'-\mu) d\mu}{\cos \frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}}}.$$

Nous allons d'abord établir que le numérateur du terme général de cette série est de l'ordre $\frac{1}{(2k+1)^2}$, si l'on admet que $v_0(l+l')=0$, circonstance qui se présente dans notre problème, puisque toute la paroi extérieure $x=l+l'$ est supposée maintenue à 0°.

En intégrant par parties le numérateur, la partie toute intégrée sera nulle, à cause des relations

$$v_0(l+l')=0 \quad \text{et} \quad \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$$

et il restera

$$- \frac{2l'}{(2k+1)\pi} \int_l^{l+l'} v'_0(\mu) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} (l+l'-\mu) d\mu.$$

Ceci semble être de l'ordre de $\frac{1}{2k+1}$ seulement, mais en appli-

quant le second théorème de la moyenne, on trouve que la quantité ci-dessus est égale à

$$-\frac{4l'^2}{(2k+1)^2\pi^2} \left\{ v'_o(l+l') \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} + [v'_o(l) - v'_o(l'+l)] \left[\sin \frac{(2k+1)\pi}{2l'} (l+l'-v) \right] \right\}_l^\xi,$$

ξ étant une quantité intermédiaire entre l et $l+l'$.

Le numérateur est donc de l'ordre de $\frac{1}{(2k+1)^2}$, si l'on suppose que v'_o demeure finie dans l'intervalle l à $l+l'$.

Il faut nous inquiéter maintenant du dénominateur

$$\cos \frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}}.$$

Désignons par la lettre n , le nombre entier qui rend minimum la valeur absolue de la différence

$$\frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} - (2n+1) \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque k varie de o à l'infini par valeurs entières et positives, n se trouve ainsi défini pour chacune des valeurs de k .

Cela dit, posons :

$$\alpha = \frac{l}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2l'}} \times \frac{2}{\pi}$$

Nous supposons que la constante α est racine carrée d'un nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, p et q étant entiers, la fraction $\frac{p}{q}$ n'étant égale à aucun des nombres obtenus en faisant successivement $k=1, 2, \dots, \infty$ dans l'expression

$$\frac{(2n+1)^2}{2k+1}$$

n étant le nombre qui correspond à k , comme il a été expliqué plus haut.

Grâce à ces hypothèses, nous allons pouvoir établir la convergence de la série (34).

Quand la valeur absolue de la différence

$$\frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} - (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

est plus grande qu'un nombre ε , fixé à l'avance, l'existence du dénominateur correspondant, équivalente à celle d'un multiplicateur

limité, ne risque pas de troubler la convergence. Il suffit donc d'examiner les dénominateurs tels qu'on ait

$$\left[\frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] < \varepsilon$$

ou en appelant ε' la quantité $\frac{2\varepsilon}{\pi}$

$$(35) \quad [\alpha \sqrt{2k+1} - (2n+1)] < \varepsilon'$$

Posons

$$f(x) = x^2 - \frac{p}{q};$$

on a, en appliquant le théorème des accroissements finis :

$$(36) \quad f(\alpha) - f\left(\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}\right) = \left(\alpha - \frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}\right) f'(\xi)$$

ξ étant un nombre intermédiaire entre α et $\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}$.

Si l'inégalité (35) est satisfaite, on a $f'(\xi)$ plus petit qu'un certain nombre fixe M. D'autre part, la substitution directe montre que $f\left(\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}\right)$ est de la forme $\frac{N}{q(2k+1)}$, N étant un nombre *entier*, positif ou négatif, *non nul*, ce qui prouve que $\left[f\left(\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}\right)\right] > \frac{1}{q(2k+1)}$; q nombre entier positif *non nul*.

L'équation (36) où $f(\alpha) = 0$ montre alors que

$$\left[\alpha - \frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}} \right] > \frac{1}{Mq(2k+1)}$$

donc $[\alpha \sqrt{2k+1} - (2n+1)]$ est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. Et la quantité

$\left[\frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} - (2n+1) \frac{\pi}{2} \right]$, qu'on déduit de la précédente, en la multipliant par $\frac{\pi}{2}$, est du même ordre.

Posons donc

$$\frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} = (2n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{A}{\sqrt{2k+1}} \quad A \text{ étant un nombre fini.}$$

On en déduit

$$\cos \frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}} = -\sin(2n+1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{A}{\sqrt{2k+1}}$$

On voit ainsi que, dans les cas les plus défavorables, le dénominateur du terme général est de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Les termes de la série, affectés des plus faibles dénominateurs, seront donc de l'ordre de $\frac{1}{(2k+1)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui assure la convergence de cette série.

20. — On peut généraliser le raisonnement précédent, en faisant des hypothèses de plus en plus larges pour α , et des hypothèses de plus en plus restrictives pour la fonction v_0 .

Soit α racine d'une équation de la forme

$$A_0 x^{2m} + A_2 x^{2m-2} + \dots + A_{2m-2} x^2 + A_{2m} = 0$$

où les A sont des nombres entiers. Supposons que α n'est égal à aucun des nombres $\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}$ définis au n° précédent.

En appliquant le théorème des accroissements finis au premier membre de l'équation ci-dessus, on a encore la relation (36), où $f'(\xi) < M$, M étant un nombre fixe, et où $f\left(\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}\right)$ est de la forme

$$\frac{N}{(2k+1)^m}, N \text{ étant un nombre entier.}$$

On tire de là

$$\left[f\left(\frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}}\right) \right] > \frac{1}{(2k+1)^m}.$$

L'équation (36) montre alors que $\left[\alpha - \frac{2n+1}{\sqrt{2k+1}} \right]$ est de l'ordre $\frac{1}{(2k+1)^m}$

par suite $[\alpha \sqrt{2k+1} - (2n+1)]$ est de l'ordre $\frac{1}{(2k+1)^{m-\frac{1}{2}}}$. On en déduit,

par un calcul analogue à celui du numéro précédent, que $\cos \frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}}$

est de l'ordre $\frac{1}{(2k+1)^{m-\frac{1}{2}}}$.

Nous allons voir à abaisser le numérateur à un ordre de grandeur suffisamment faible pour que la série soit convergente. Faisons dans ce numérateur m intégrations par parties successives, et

faisons les hypothèses nécessaires pour l'annulation de la partie toute intégrée qui apparaît dans chaque opération.

Ces hypothèses sont : 1° $v_0(x)$ et ses dérivées paires d'ordre égal ou inférieur à $m - 1$, nulles pour $x = l + l'$; 2° les dérivées impaires d'ordre égal ou inférieur à $m - 1$, nulles pour $x = l$.

Le numérateur aura ainsi en évidence le facteur $\frac{1}{(2k+1)^m}$, et en appliquant au dernier résultat le second théorème de la moyenne, on mettra en évidence le facteur $\frac{1}{(2k+1)^{m+1}}$.

Par suite, le terme général de la série est de l'ordre $\frac{1}{(2k+1)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui assure la convergence de cette série.

21. — Il est bien certain que les conditions de restriction précédentes, qui nous ont servi à mettre en lumière, par un artifice élégant, la convergence de la série $\Sigma N u$ sont loin d'être des conditions nécessaires. Il est même à remarquer que la condition imposée à α au n° 19, obligeant ainsi la quantité $\frac{l^2}{2a^2l'}$, à être un nombre incommensurable, place cette constante α dans des conditions nettement défavorables, puisque tout danger d'avoir un dénominateur nul est écarté si $\frac{l^2}{2a^2l'}$ est commensurable.

Il est hors de doute néanmoins que la série $\Sigma N u$ pourra être divergente, pour certaines valeurs de la constante α ; il suffirait, par exemple, que la quantité $\frac{l}{a} \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2l'}}$ puisse devenir un multiple entier impair de $\frac{\pi}{2}$.

§ VII. — Détermination des constantes physiques du problème d'après les données de Ser.

22. — Nous considérons une cheminée de deux mètres de diamètre, formée avec des tôles de fer de 0^m01 d'épaisseur, et ayant une hauteur de 85 mètres. (Il existe au Creusot une cheminée cylindrique ayant ces dimensions, sauf que les tôles de fer ont une épaisseur qui est 0^m014 à la base et 0^m007 au sommet. Cette cheminée admet le gaz du foyer à la température $T = 300^\circ$),

Nous faisons donc $l = 1$ mètre, $l' = 0^m01$, $T = 300$ degrés centigrades.

23. — **Détermination de k' .** — Le coefficient de conductibilité intérieure du fer servant à la confection des tôles est donné égal à 58,82 par Ser dont les unités sont: le mètre, l'heure, la calorie-kilogramme, le degré centigrade. Si l'on convertit ce nombre aux unités C.G.S., on trouve $k' = 0,1634$, valeur qui se trouve intercalée entre les deux nombres de Forbes inscrits à l'Annuaire du bureau des longitudes :

$$\begin{aligned} k' &= 0,1770 \text{ à } 50^0 \\ k' &= 0,1560 \text{ à } 100^0 \end{aligned}$$

Nous donnons notre préférence au chiffre de Ser ; car ses expériences sont faites avec des échantillons prélevés sur les matériaux de construction.

24. — **Détermination de k .** — Ser ne donne pas le coefficient de conductibilité intérieure des gaz d'une cheminée. Ce coefficient entre dans ses formules, mêlé à d'autres, de manière à former un facteur plus général, que l'expérience lui détermine. C'est ainsi qu'une seule expérience détermine en calorimétrie, ce facteur complexe qu'on nomme la réduite en eau du calorimètre. Mais l'éminent ingénieur donne, dans son ouvrage de « Physique industrielle » (1), les coefficients de conductibilité suivants, évalués avec le choix d'unités citées n° 22 :

air	0,00028
O	0,000294
Az	0,000282
CO ²	0,000240
H	0,002016

D'autre part, d'après Scheurer-Kestner, la composition de 1 mètre cube de gaz provenant de la combustion dans un foyer industriel est, en volume et en poids

NATURE DES GAZ	VOLUMES RENFERMÉS DANS UN MÈTRE CUBE DE GAZ	POIDS RENFERMÉS DANS UN MÈTRE CUBE DE GAZ
	mc.	k.
CO ²	0,110	0,21747
O	0,060	0,08580
CO	0,003	0,00374
H	0,005	0,00048
Carbures d'H	0,003	0,00216
Az	0,745	0,93572
H ² O (vapeur)	0,074	0,05920
	1,000	1,30457

(1) Cours professé à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures.

On voit que les renseignements dont nous disposons sont incomplets: 1° par la conductibilité de CO, H²O et des carbures que nous ignorons, 2° par la loi suivant laquelle la conductibilité de chaque élément intervient dans le calcul de la conductibilité totale. Nous avons admis pour cette loi que $k = \sum v_i k_i$, v_i étant, pour chaque élément, le volume entrant dans 1^mc de gaz. Quant aux trois éléments dont nous ignorons la conductibilité, ils ne constituent que les 0,08 du mélange, et on peut supposer qu'ils ne modifient pas notablement la conductibilité k du mélange. On trouve ainsi $k = 0,000287$, qui est sensiblement le chiffre trouvé par Ser pour l'air atmosphérique.

25. — **Détermination de C.** — C est la chaleur spécifique *par unité de volume*. L'ouvrage de Ser donne les renseignements suivants :

CO ²		0,2169	chaleur spécifique de l'unité de poids.
CO		0,2450	—
O		0,2175	—
Az		0,2438	—
H		3,4090	—
C ² H ⁴		0,3690	—
CH ⁴		0,5930	—

Nous calculons C par la formule $C = \sum p_i c_i$, les p_i étant pour chaque élément le poids entrant dans 1^mc de gaz. On trouve ainsi

$$C = 0,315$$

26. — **Détermination de w.** — La vitesse w , imprimée aux gaz du foyer par la dépression que produit la cheminée, s'appelle le tirage. Le calcul théorique du tirage ferait entrer en ligne de compte la moyenne des températures de chaque section, ce qui nécessiterait que le problème soit déjà résolu. Et le nombre ainsi obtenu devrait être modifié notablement, pour tenir compte des résistances de toutes natures que le gaz rencontre avant ou après son entrée dans la cheminée. Une telle détermination est de celles qu'il vaut mieux laisser à l'expérience. Aussi, avons-nous calculé w par le moyen que Ser propose aux ingénieurs.

$$w = w_1 \sqrt{\frac{H}{1+R}}$$

w_1 étant la vitesse du gaz dans une cheminée de hauteur égale

à 1 mètre, sans résistances intérieures (les w_4 sont inscrits dans un tableau, page 589, tome I, Ser),

H, hauteur en mètres de la cheminée,

R, coefficient pour tenir compte des résistances. Dans une cheminée ordinaire, on a $1+R$ variant de 15 à 40 suivant la plus ou moins grande ouverture du registre. w se trouve ainsi compris entre 6 et 11 mètres par seconde, dans la cheminée décrite n° 22. Une telle vitesse produit un bon tirage, w devant seulement être supérieur à 1 mètre 76 pour qu'il n'y ait pas à craindre que, sous l'influence du vent, le tirage ne devienne négatif, en certains moments.

§ VIII. — Deuxième exemple d'application numérique, où les constantes physiques sont déterminées d'après les données de Ser, mais où l'on suppose que le fluide est animé d'un mouvement très lent.

27. — Convenons de prendre les mêmes données que celles qui ont été choisies au § VII. Le système des unités étant, comme dans ce paragraphe

le mètre,

l'heure,

le degré centigrade,

la calorie-kilogramme,

on aura $l = 1$, $l' = 0,01$, $k' = 58,82$, $k = 0,000287$, $C = 0,315$.

Nous supposons, en outre, que le fluide est animé d'un mouvement très lent, dont nous supposons la vitesse égale à 0 m.00091 par heure, de façon à ce qu'on ait

$$a^2 = \frac{k}{Cw} = \frac{0,000287}{0,315 \times 0,00091} = \text{sensiblement } 1.$$

En portant ces valeurs dans les formules (20) et (21) du numéro (14), il vient :

$$(37) \quad \begin{cases} u = \sum M \sin \left(\frac{m}{10} \right)^2 \cos mx e^{-m^2 z} \\ v = \sum M \cos m \sin m^2 (1,01 - x) e^{-m^2 z} \end{cases}$$

les m étant fournis par l'équation transcendante

$$(38) \quad 0,000287 \sin m \cos \left(\frac{m}{10} \right)^2 = 58,82 m \cos m \cos \left(\frac{m}{10} \right)^2.$$

28. — A cause de la petitesse du rapport $\frac{0,000287}{58,82}$, les racines de l'équation (38), lorsqu'on essaye de les déterminer par l'essai successif de nombres, se confondent jusqu'à des décimales lointaines, inaccessibles lorsqu'on se sert pour les calculs de tables de logarithmes, avec les racines respectives des deux équations

$$\cos m = 0 \quad , \quad \cos \left(\frac{m}{10} \right)^2 = 0.$$

Donc, les conditions du calcul sont *pratiquement* les mêmes que dans le cas théorique où l'on suppose $\frac{k}{k'} = 0$. Les paramètres m seront rangés en deux groupes distincts, les *paramètres α* , racines de l'équation $\cos m = 0$, et les *paramètres β* , racines de l'équation $\cos \left(\frac{m}{10} \right)^2 = 0$.

Les premiers ont pour expression générale

$$\alpha_i = \frac{2i+1}{2} \pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty;$$

ils sont équidistants. Les seconds ont pour expression générale

$$\beta_i = 5\sqrt{2(2i+1)}\pi \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty;$$

ils sont plus rares au début que les premiers, mais ils deviennent ensuite de plus en plus nombreux, et l'intervalle de deux consécutifs, qui décroît sans cesse, tend rapidement vers zéro.

L'approximation précédente, qui consiste à faire $\frac{k}{k'} = 0$ dans l'équation transcendante qui donne la loi de succession des paramètres m , revient à supposer que le mur est exclusivement chauffé par conductibilité à partir de sa base, ou comme si sa paroi intérieure était imperméable. Dès lors, la détermination de la température ν dans le mur revient à la résolution d'un problème ordinaire de Fourier. Cette température ν du mur étant obtenue, celle u du fluide se trouve ainsi singulièrement facilitée, et les méthodes de Fourier se trouvent applicables à sa détermination.

Toutefois, si le rapport $\frac{k}{k'}$ est simplement petit, sans être nul, pour des valeurs de z très grandes, mais où ν est encore sensible, l'influence des gaz chauds peut devenir comparable à celle de la conduc-

tibilité propre du mur, et il y aurait lieu pour ces grandes valeurs de z , de tenir compte des parties fonctions de $\frac{k}{\bar{k}}$.

Le dédoublement du problème est mis en évidence par celui des racines de l'équation transcendante. Les paramètres α sont relatifs au fluide, et les paramètres β sont relatifs au mur.

29. — Nous avons donc à appliquer à l'exemple qui fait l'objet de ce paragraphe, les formules (26) et (27) du §VI, et les méthodes de calcul de ce paragraphe. Nous prendrons la fonction u_0 égale à T, température du gaz sortant du foyer; et nous supposerons que la fonction v_0 est égale à T depuis le bord intérieur $x = l$ jusque tout près du bord extérieur $x = l + l'$, où elle décroît rapidement vers 0 qu'elle atteint sur le bord extérieur $x = l + l'$.

On sait que dans ces conditions, les coefficients N du développement

$$v_0 = \sum N \mathfrak{N},$$

sont calculables par la méthode de Fourier, et nous avons démontré la légitimité de ce développement. Mais comme la suite des valeurs données $v_0(x)$ est assez mal commode à représenter par une fonction ⁽¹⁾, il vaut mieux prendre dans $\sum N \mathfrak{N}$ un nombre limité de termes, n par exemple, et déterminer leurs coefficients par la condition que

$$N_1 \mathfrak{N}_1 + N_2 \mathfrak{N}_2 + \dots + N_n \mathfrak{N}_n$$

soit égal à T, en n points équidistants de la base, compris entre $x = l$ et x voisin de $l + l'$.

Nous allons faire les calculs en prenant successivement $n = 1$, $n = 2$.

(1) La fonction $v_0(x)$ qui doit être nécessairement une donnée du problème analytique, tel que nous l'avons posé, semble au contraire ne pouvoir faire partie des données du phénomène. Celui-ci, en effet, ne peut dépendre que des dimensions de l'appareil, des conductibilités du fluide et des murs, des éléments de la convection de l'atmosphère extérieure, et de la température des gaz du foyer. Il y aurait lieu alors d'étudier le flux de chaleur qui pénètre dans le mur par sa base, et établit sur cette base une température $v_0(x)$. Si donc la fonction $v_0(x)$ est une donnée du problème analytique, c'est que celui-ci n'embrasse pas la totalité du phénomène. Cette circonstance se présente souvent dans les problèmes de Physique Mathématique; et il est intéressant de remarquer qu'une fonction n'est pas complètement arbitraire, si elle exprime le résultat d'un phénomène. [Voir par exemple, à ce sujet, l'étude des conditions de possibilité d'un état antérieur ayant amené un état donné de température, dans un mémoire de M. Appell, relatif à l'équation $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta z}{\delta x}$ insérée au Journal de Mathématiques pures et appliquées, année 1892.]

30. — Prenons d'abord un seul terme dans le développement de v , le terme qui correspond au premier paramètre

$$\beta_1 = 5\sqrt{2\pi}$$

On aura ainsi

$$v = N \cos 5\sqrt{2\pi} \sin 50\pi(1,01 - x)e^{-50\pi z}.$$

Déterminons N par la condition que, pour $z = 0$ et $x = 1$ (bord intérieur) on ait $v = T$. Il suffit pour cela de prendre

$$N = \frac{T}{\cos 5\sqrt{2\pi}} = \text{sensiblement } T^{(1)}.$$

On aura ainsi

$$(39) \quad v = T \sin 50\pi(1,01 - x)e^{-50\pi z}$$

Nous convenons ainsi d'admettre que l'état stationnaire du rectangle de base $z = 0$, dans le mur, est exprimé par la fonction

$$v_0 = T \sin 50\pi(1,01 - x).$$

La fonction u devient alors :

$$u(x, z) = \sum_{\alpha} M \sin \left(\frac{\alpha}{10} \right)^2 \cos \alpha x e^{-\alpha^2 z} + T \cos 5\sqrt{2\pi} x e^{-50\pi z}$$

et il faut déterminer les M pour qu'on ait, dans le plan $z = 0$,

$$T = \sum_{\alpha} M \sin \left(\frac{\alpha}{10} \right)^2 \cos \alpha x + T \cos 5x \sqrt{2\pi}$$

En appliquant la méthode de Fourier, on a

$$M \sin \left(\frac{\alpha}{10} \right)^2 = T \frac{\int_0^1 (1 - \cos 5x \sqrt{2\pi}) \cos \alpha x dx}{\int_0^1 \cos^2 \alpha x dx}$$

ou en effectuant les intégrations

$$M \sin \left(\frac{\alpha}{10} \right)^2 = \frac{100\pi T \sin \alpha}{\alpha(50\pi - \alpha^2)}$$

(1) En effet $\cos 5\sqrt{2\pi} = \cos \frac{5\pi}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} = \cos (7,979 \times 90^\circ) = \cos 4^\circ 89' = 0,9997.. = \text{sensiblement } 1.$

En effectuant le calcul pour les 9 premières valeurs de α , on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
 (40) \quad \frac{1}{T} u(x, z) = & 1,293 \cos \frac{\pi x}{2} e^{-\frac{\pi^2 z}{4}} - 0,494 \cos \frac{3\pi x}{2} e^{-\frac{9\pi^2 z}{4}} \\
 & + 0,419 \cos \frac{5\pi x}{2} e^{-\frac{25\pi^2 z}{4}} \\
 & - 0,790 \cos \frac{7\pi x}{2} e^{-\frac{49\pi^2 z}{4}} - 0,519 \cos \frac{9\pi x}{2} e^{-\frac{81\pi^2 z}{4}} \\
 & + 0,144 \cos \frac{11\pi x}{2} e^{-\frac{121\pi^2 z}{4}} \\
 & - 0,059 \cos \frac{13\pi x}{2} e^{-\frac{169\pi^2 z}{4}} + 0,033 \cos \frac{15\pi x}{2} e^{-\frac{225\pi^2 z}{4}} \\
 & - 0,021 \cos \frac{17\pi x}{2} e^{-\frac{289\pi^2 z}{4}} \\
 & \dots\dots + \cos 5x \sqrt{\frac{1}{2\pi e}} e^{-50\pi^2 z}.
 \end{aligned}$$

Les formules (39) et (40) donnent la solution numérique du problème.

La formule (40) bornée à ses premiers termes ne pourra suffire que si elle donne pour la valeur de son second membre en chaque point du plan $z=0$ de l'entrée de la cheminée, une valeur très sensiblement égale à T.

On trouve, en effectuant les calculs

$$\begin{aligned}
 v(x, 0) = & 1,006 T \quad \text{pour } x=0 \\
 = & 1,022 T \quad \text{pour } x=\frac{1}{3} \\
 = & 0,985 T \quad \text{pour } x=0,5 \\
 = & 0,994 T \quad \text{pour } x=\frac{2}{3} \\
 = & 1,000 T \quad \text{pour } x=1.
 \end{aligned}$$

C'est une approximation très suffisante.

31.—Recommençons les calculs en prenant pour v , les deux premiers termes de son développement (27).

$$v = N_1 \cos 5\sqrt{2\pi} \sin 50\pi(1,01-x) e^{-50\pi^2 z} + N_2 \cos 5\sqrt{6\pi} \sin 150\pi(1,01-x) e^{-150\pi^2 z}.$$

Cette fonction donne o , pour $z=0$ et $x=1.01$ (bord extérieur). Déterminons N_1 et N_2 par les deux conditions d'avoir $v(x, 0)$ égal à T au bord intérieur $x=1$ et au milieu de l'épaisseur $x=1.005$.

On aura le système des deux équations :

$$\begin{aligned} T &= N_1 + 0,96 N_2 \\ T\sqrt{2} &= N_1 - 0,96 N_2 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} N_1 &= 1,207 T \\ N_2 &= -0,2156 T. \end{aligned}$$

La fonction v s'écrit alors

$$(41) \quad \frac{1}{T} v = 1,207 \sin 50\pi(1,01 - x)e^{-50\pi z} + 0,207 \sin 150\pi(1,01 - x)e^{-150\pi z}.$$

et la fonction u s'écrit

$$u = \sum_{\alpha} M \sin\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 \cos \alpha x e^{-\alpha^2 z} + (1,207 \cos 5x \sqrt{2\pi} e^{-50\pi z} + 0,2156 \cos 5x \sqrt{6\pi} e^{-150\pi z}) T$$

On calcule les coefficients M par la méthode de Fourier, de manière qu'on ait $u(x, 0) = T$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. On trouve ainsi

$$M = T \frac{\int_0^1 (1 - 1,207 \cos 5x \sqrt{2\pi} - 0,2156 \cos 5x \sqrt{6\pi}) \cos \alpha x dx}{\sin\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 \int_0^1 \cos^2 \alpha x dx}$$

et en effectuant les intégrales

$$M \sin\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 = 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1,207\alpha}{50\pi - \alpha^2} - \frac{0,207\alpha}{150\pi - \alpha^2} \right).$$

Nous avons calculé les valeurs des M relatifs aux 9 premières exponentielles α , et ces valeurs portées dans l'expression ci-dessus de u donnent finalement :

$$\begin{aligned} (42) \quad \frac{1}{T} u(x, z) &= 1,2962 \cos \frac{\pi x}{2} e^{-\frac{\pi^2 z}{4}} - 0,5044 \cos \frac{3\pi x}{2} e^{-\frac{9\pi^2 z}{4}} + 0,448 \cos \frac{5\pi x}{2} e^{-\frac{25\pi^2 z}{4}} \\ &- 0,906 \cos \frac{7\pi x}{2} e^{-\frac{49\pi^2 z}{4}} - 0,684 \cos \frac{9\pi x}{2} e^{-\frac{81\pi^2 z}{4}} + 0,2216 \cos \frac{11\pi x}{2} e^{-\frac{121\pi^2 z}{4}} \\ &- 0,246 \cos \frac{13\pi x}{2} e^{-\frac{169\pi^2 z}{4}} - 0,0588 \cos \frac{15\pi x}{2} e^{-\frac{225\pi^2 z}{4}} + 0,0028 \cos \frac{17\pi x}{2} e^{-\frac{289\pi^2 z}{4}} \\ &\dots\dots\dots \\ &+ 1,207 \cos 5x \sqrt{2\pi} e^{-50\pi z} + 0,2156 \cos 5x \sqrt{6\pi} e^{-150\pi z}. \end{aligned}$$

Les formules (41) et (42) donnent la solution numérique du pro-

blème. Il reste à vérifier par un calcul direct avec quelle approximation les fonctions u et v reproduisent dans le plan $z=0$ les conditions imposées, savoir :

1° la fonction $u(x,0)$ doit être égale à T en chaque point de l'intervalle $x=0$ à $x=l$.

2° la fonction $v(x,0)$ doit être égale à T depuis $x=l$ jusqu'à une certaine distance du bord extérieur à partir de laquelle elle décroît rapidement vers 0.

On trouve :

$$\begin{array}{l|l} u = 0,992 T & \text{pour } x = 0 \\ u = 1,003 T & \text{pour } x = \frac{l}{3} \\ u = 0,987 T & \text{pour } x = \frac{l}{2} \\ u = 1,007 T & \text{pour } x = \frac{2l}{3} \\ u = 1,000 T & \text{pour } x = l \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} v = 1,000 T & \text{pour } x = l \\ v = 1,045 T & \text{pour } x = l + \frac{l'}{3} \\ v = 1,000 T & \text{pour } x = l + \frac{l'}{2} \\ v = 0,810 T & \text{pour } x = l + \frac{2l'}{3} \\ v = 0 & \text{pour } x = l + l'. \end{array} \right.$$

Cette approximation est, comme on le voit, très satisfaisante.

§ IX. — Troisième exemple d'application numérique où toutes les constantes physiques reçoivent les valeurs déterminées expérimentalement.

32. — Cette application différera de la précédente en ce que a^2 recevra ici la valeur très petite qui lui convient. Nous prendrons comme exemple une cheminée en tôle de fer de 0^m,30 de largeur intérieure, de 0^m,01 d'épaisseur de paroi, ayant une hauteur de 20 mètres, admettant le gaz du foyer à la température de 200°. Le tirage minimum calculé par la formule du n° 26 est $w = 2^m,7$.

Nous choisirons les unités pour que le coefficient a^2 ne soit pas trop petit. Un calcul facile montre que a^2 a la dimension d'une longueur, ce qui amène à prendre petite l'unité de longueur. Nous faisons choix des unités suivantes :

Unité de <i>longueur</i>	: le dixième de millimètre
Unité de <i>temps</i>	: la seconde
Unité de <i>température</i>	: le degré centigrade
Unité de <i>chaleur</i>	: la petite calorie

Dans ces conditions,

$$l = 1500, \quad l' = 100, \quad \frac{k'}{k} = 204.948, \quad a^2 = \text{sensiblement } 0,001.$$

En portant ces valeurs dans les formules (20) et (21) on a

$$u = \sum M \sin 0,1m^2 \cos mx e^{-0,001m^2z}$$

$$v = \sum M \cos 1500m \sin 0,001m^2(1600 - x) e^{-0,001m^2z}.$$

les m étant les racines de l'équation

$$\sin 1500m \sin 0,1m^2 = 204,948m \cos 1500m \cos 0,1m^2.$$

Les racines de cette équation sont très sensiblement celles des deux équations.

$$\cos 1500m = 0$$

$$\cos 0,1m^2 = 0$$

Nous désignerons par α les racines de la première de ces deux équations, et β celles de la seconde.

On aura alors, en désignant comme au n° 17, par M le coefficient relatif à une exponentielle en α ; et par N celui relatif à une exponentielle en β .

$$u = \sum_{\alpha} M \sin 0,1\alpha^2 \cos \alpha x e^{-0,001\alpha^2z} + \sum_{\beta} N \sin 0,1\beta^2 \cos \beta x e^{-0,001\beta^2z}$$

$$v = \sum_{\beta} N \cos 1500\beta \sin 0,001\beta^2(1600 - x) e^{-0,001\beta^2z}.$$

Convenons de prendre pour $v(x,z)$ le premier terme du développement correspondant à $\beta = \sqrt{5}\pi$. On aura

$$v = N \cos 1500\sqrt{5}\pi \sin 0,005\pi(1600 - x) e^{-0,005\pi z}.$$

Déterminons N pour que l'on ait $v = T$ pour $z = 0$ et $x = 1.500$. Il suffit pour cela de poser

$$N \cos 1500\sqrt{5}\pi = T$$

On a ainsi pour $v(x,z)$ la formule finale :

$$(43) \quad v = T \sin 0,005\pi(1600 - x) e^{-0,005\pi z}$$

On a fait dans la précédente formule

$$N = \frac{T}{\cos 1500 \sqrt{5\pi}} = 2,2045 T.$$

En portant dans l'expression de $u(xz)$, il vient

$$u = \sum_z M \sin 0,1z^2 \cos \alpha x e^{-0,001z^2z} + 2,2045T \cos x \sqrt{5\pi} e^{-0,005\pi z},$$

et l'on doit déterminer les coefficients M pour qu'on ait

$$u(x, 0) = T.$$

Si l'on pose

$$M \sin 0,1z^2 = P$$

on a donc à trouver, par la méthode de Fourier, les coefficients du développement

$$T(1 - 2,2045 \cos x \sqrt{5\pi}) = \sum P \cos \alpha x.$$

d'où l'on tire

$$P = T \frac{\int_0^{1500} (1 - 2,2045 \cos x \sqrt{5\pi}) \cos \alpha x dx}{\int_0^{1500} \cos^2 \alpha x dx}$$

et en effectuant les intégrations

$$P = \frac{2 \sin 1500\alpha}{1500} \cdot \frac{5\pi T}{\alpha(5\pi - \alpha^2)}$$

en remplaçant α_i par sa valeur $\frac{2i-1}{3000} \pi$, on trouve

$$(44) \quad P_i = \frac{18 \times 10^7 \times (-1)^{i+1} T}{(2i-1)\pi [45 \times 10^6 - (2i-1)^2 \pi]} \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

L'expression ci-dessus des coefficients P_i montre que les premiers d'entre eux seront très sensiblement obtenus, en les calculant par la formule simplifiée

$$P_i = \frac{180 (-1)^{i+1} T}{45\pi(2i-1)} \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

Ces coefficients sont alternativement positifs et négatifs, et on passe du premier à chacun des autres en le divisant par la suite des

nombres impairs 3, 5, 7.... On s'arrête dans leur calcul, lorsque la différence entre les valeurs absolues de deux termes consécutifs est devenue faible.

Si maintenant, nous revenons à la formule (44) qui donne la vraie valeur des coefficients P_i , on voit que pour les valeurs de i qui rendent le crochet du dénominateur le plus faible possible, il y a à craindre que les coefficients P_i correspondants ne soient très grands, et même que l'un d'eux soit infini. Cette dernière hypothèse est impossible, car la quantité commensurale 45×10^6 ne peut jamais être égale à la quantité incommensurable $(2i-1)^2\pi$. Toutefois, le coefficient P_i où le crochet est minimum peut être très grand. Sans doute, l'importance de ce coefficient ne manquera pas d'être compensée par celle d'un terme de signe contraire, mais cette circonstance nuirait à la commodité des évaluations numériques, en leur exigeant une plus grande précision. On se tirera aisément d'embarras en faisant varier d'une quantité très faible les données, l' par exemple. A cause de cette espèce de continuité physique qui proportionne toujours l'oscillation des effets à celle des causes, on aura altéré infiniment peu les résultats, tout en plaçant leur évaluation numérique dans des circonstances plus favorables.

Pour les données de notre application, on trouve que le crochet $45 \times 10^6 - (2i-1)^2\pi$ serait nul pour une valeur de i comprise entre 1892 et 1893. Les deux coefficients correspondants auront même signe, ils constitueront la seule exception à l'ordre alterné des signes de la série. Il y a lieu de calculer les coefficients placés avant et après ces deux coefficients singuliers, tant que deux consécutifs des derniers coefficients diffèrent notablement en valeur absolue.

Les calculs numériques fournissent pour $u(x,z)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 (45) \quad u(x,z) = & 1,276 \cos \frac{\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,425 \cos \frac{3\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3\pi}{3000} \right)^2 z} \\
 & + 0,255 \cos \frac{5\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{5\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,182 \cos \frac{7\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{7\pi}{3000} \right)^2 z} \\
 & + 0,142 \cos \frac{9\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{9\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,116 \cos \frac{11\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{11\pi}{3000} \right)^2 z} \\
 & + 0,098 \cos \frac{13\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{13\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,085 \cos \frac{15\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{15\pi}{3000} \right)^2 z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,075 \cos \frac{17\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{17\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,067 \cos \frac{19\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{19\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& \dots\dots\dots \\
& + 0,054 \cos \frac{3773\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3773\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,066 \cos \frac{3775\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3775\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& + 0,083 \cos \frac{3777\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3777\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,112 \cos \frac{3779\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3779\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& + 0,1726 \cos \frac{3781\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3781\pi}{3000} \right)^2 z} - 0,346 \cos \frac{3783\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3783\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& - 2,082 \cos \frac{3785\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3785\pi}{3000} \right)^2 z} + 0,276 \cos \frac{3787\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3787\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& - 0,147 \cos \frac{3789\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3789\pi}{3000} \right)^2 z} + 0,101 \cos \frac{3791\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3791\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& - 0,076 \cos \frac{3793\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3793\pi}{3000} \right)^2 z} + 0,0615 \cos \frac{3795\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3795\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& - 0,051 \cos \frac{3797\pi x}{3000} e^{-0,001 \left(\frac{3797\pi}{3000} \right)^2 z} \\
& \dots\dots\dots + 2,2045 \cos x\sqrt{5\pi} e^{-0,005\pi z}.
\end{aligned}$$

33. — Les formules (43) et (45) donnent la solution numérique du problème.

Il faut vérifier encore ici avec quelle approximation, la fonction $u(x, 0)$ donne en chaque point de l'intervalle $x = 0$ à $x = 1500$, la valeur T.

On trouve, pour :

$x = 0$	$u = 1,043 \text{ T}$
$x = 500$	$u = 0,999 \text{ T}$
$x = 750$	$u = 1,059 \text{ T}$
$x = 1000$	$u = 0,953 \text{ T}$
$x = 1500$	$u = 1,000 \text{ T}$

34. — **Moyenne de la température à la sortie.** — La température en chaque point de la section $z = H$ est

$$u = \sum P_i \cos \alpha_i x e^{-a^2 \alpha_i^2 H} + 2,2045 T \cos x \sqrt{5\pi} e^{-a^2 \cdot 5\pi H}$$

La moyenne de la température depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$ est

$$\text{Moyenne de } u = \frac{1}{l} \left\{ \sum_i P_i \frac{\sin \alpha_i l}{\alpha_i} e^{-a^2 \alpha_i^2 H} + 2,2045 T \frac{\sin l \sqrt{5\pi}}{\sqrt{5\pi}} e^{-a^2 \cdot 5\pi H} \right\}$$

A cause du terme $\frac{1}{\alpha_i} = \frac{3000}{(2i-1)\pi}$, les premiers termes sous le signe Σ sont seuls importants. L'exponentielle qui est sensiblement égale à 1 dans ces premiers termes décroît vers 0 quand $a^2\alpha^2$ est devenu considérable.

Avec les données de l'application numérique précédente, $H = 200.000$ (20 mètres exprimés d'après l'unité choisie n° 32). Dans ces conditions, l'exponentielle en $a^2.5\pi H$, dont est affecté le terme supplémentaire, est égale à $e^{-1000\pi}$. Ce terme supplémentaire, n'influe donc pas, non plus, d'une façon sensible sur la moyenne de u . Et celle-ci est simplement exprimée par les premiers termes de son développement, où les exponentielles sont voisines de 1. Nous trouvons ainsi :

$$\text{Moyenne de } u = \frac{72}{75} T$$

Nous expliquerons plus loin comment on est amené à admettre ce qui suit à titre d'approximation :

On considère une cheminée à section carrée, de côté égal à $2l$; on appelle T la température d'entrée des gaz et W celle moyenne de sortie. On considère d'autre part, une lame indéfinie du gaz, d'épaisseur égale à $2l$, et circulant entre 2 murs verticaux parallèles identiques à ceux qui constituent la cheminée carrée; T est encore la température d'entrée et V la moyenne des températures de sortie. On a la relation :

$$(46) \quad W = \frac{V^2}{T}$$

Si nous appliquons la formule (46) à notre exemple numérique, on trouve que dans une cheminée, à section carrée, de côté égal à $0^m,30$, de hauteur égale à 20 mètres, et dont les parois sont constituées par des tôles de fer d'épaisseur égale à $0^m,01$, on a comme moyenne des températures de sortie les $\left(\frac{72}{75}\right)^2$ de la température d'entrée.

Ce chiffre de $\left(\frac{72}{75}\right)^2 = 0,921$ est bien supérieur à celui que détermine la pratique 0,740 environ. Cela tient sans doute à ce que les remous qui se produisent dans une cheminée, activent singulièrement le refroidissement, en renouvelant sans cesse les molécules gazeuses qui sont au contact de la paroi froide. Une autre raison,

qui ne peut manquer d'augmenter le refroidissement, est que la cheminée est limitée à sa partie supérieure, tandis que nous la supposons de longueur infinie. La face supérieure $z = H$, en communication avec l'atmosphère, est un siège supplémentaire de perte de chaleur.

§ X. — Réflexions générales provoquées par les applications numériques.

35. — Des applications numériques précédentes, il résulte que lorsqu'on voudra évaluer numériquement les fonctions u , v définies par l'ensemble des formules (20) et (21) il y aura à distinguer deux cas :

1° Les constantes k' et k , exprimant la conductibilité dans la paroi fixe et dans le fluide en mouvement, *sont du même ordre de grandeur*. C'est le cas qui se présente pour un fluide très conducteur, comme un métal en fusion circulant dans une conduite refroidie extérieurement par un courant rapide d'air ou d'eau froide.

Les racines de l'équation (21) devront être alors évaluées par les essais successifs de nombres. On déterminera, par exemple, les trois premières de ces racines, et on évaluera les coefficients correspondants par la méthode des moindres carrés.

On jugera ensuite de la valeur de l'approximation, en vérifiant directement que les fonctions $u(x, z)$ et $v(x, z)$ reproduisent bien pour $z = 0$ les valeurs qu'on leur a assignées à l'avance. Si l'écart est trop considérable, il y aura lieu de prendre un nombre de termes supérieur à 3.

2° La conductibilité k' de la paroi fixe *est très grande* par rapport à la conductibilité k du fluide en mouvement. C'est ce qui a lieu dans les cheminées d'usines, construites en maçonnerie, et *a fortiori* dans celles construites en tôle métallique.

Dans ce cas, nous avons vu que les racines de l'équation (21) se partagent en deux suites distinctes. La première suite comporte des nombres α équidistants ; la seconde comporte des nombres β rares au début, mais qui vont en se rapprochant indéfiniment.

Les nombres β seuls interviennent dans la formation de la fonction v . Les coefficients qui entrent dans le développement de cette fonction sont exactement calculables par la méthode de Fourier, en

fonction de la valeur v_0 que doit prendre v en chaque point du plan $z = 0$. Mais comme cette suite de valeurs numériques v_0 est assez mal commode à représenter par une fonction, il vaudra mieux, si l'on prend n termes, déterminer leurs coefficients, par la condition que la fonction $v(x, 0)$ soit égale à T en n points équidistants et compris depuis le bord intérieur $x = l$ jusqu'à x voisin du bord extérieur $x = l + l'$. Comme la fonction $v(x, z)$ est naturellement nulle pour $x = l + l'$, elle sera décroissante jusqu'à 0 depuis le dernier point où elle est assujettie à être égale à T .

On a ainsi déterminé la fonction $v(x, z)$ et la partie de la fonction $u(x, z)$ relative aux nombres β ⁽¹⁾. La partie relative aux nombres α a ses coefficients P déterminables exactement par la méthode de Fourier, d'une application facile ici, puisque la fonction à reproduire est une constante.

Comme on ne peut pas, pratiquement, tenir compte dans un calcul numérique de tous les coefficients P , il y aura lieu de prévoir par avance quels sont ceux de ces coefficients qui ont de l'importance. Pour cela, on construira la courbe

$$P_i = f(i)$$

où i est le rang de la racine α_i qui fournit le coefficient P_i . Cette courbe sera construite en y considérant i variant avec continuité. Elle présentera autant d'asymptotes verticales qu'on aura pris de termes dans le développement de $v(x, z)$. Les valeurs des coefficients P_i seront les ordonnées correspondant aux abscisses mesurées par des nombres entiers 1.2.3. . . . Il est essentiel de remarquer que les abscisses des asymptotes verticales étant des nombres incommensurables (à cause de la présence de π dans leur expression), il ne saurait y avoir de coefficients P infinis.

Toutefois, par suite du hasard des données, des coefficients de signes contraires pourraient avoir des valeurs absolues très grandes donnant au résultat une forme tendant vers la forme illusoire $\infty - \infty$, et rendant difficile l'évaluation numérique. Une modification infinitésimale des données qu'on fera porter sur l' de préférence,

(1) La partie de la fonction u relative aux nombres β , se trouvant ainsi limitée à un nombre fini de termes, il n'y aura pas à se préoccuper des conditions de convergence étudiées au § VI. Quelle que soit la signification de la partie limitée de la série $\Sigma N u$, le calcul des $M s'$ achèvera par la méthode de Fourier, sous la réserve, bien entendu, que la nouvelle fonction qu'on développe satisfasse aux conditions de Dirichlet.

placera les calculs dans des circonstances plus favorables, et comme nous l'avons déjà indiqué, n'apportera pas de changement sensible dans les valeurs numériques des résultats.

§ XI. — **Extension des calculs précédents au cas plus général où les températures extérieures de chaque côté varient dans le sens de la longueur.**

36. — Soit oy l'axe qui fait un trièdre trirectangle avec les deux axes déjà choisis ox, oz . Soit λ la longueur de la lame dans le sens oy ; les deux faces perpendiculaires à oy sont encore supposées imperméables, et les données initiales symétriques par rapport au plan $x = 0$, symétrie qui subsiste évidemment. Convenons de prendre comme 0 de l'échelle des températures la moyenne des températures extérieures.

Nous allons démontrer que *la moyenne des températures sur chaque ligne. $x = c^0, z = c^0$, est précisément la température uniforme que prendraient tous les points de cette ligne, si l'atmosphère était uniformément à 0.*

Soit encore T la température d'entrée des gaz, supposée uniforme dans toute la section. Soit $\theta (xyz)$ la température des gaz et $\theta' (xyz)$ celle des murs verticaux. Considérons dans l'intérieur des murs verticaux un prisme de longueur λ dans le sens des y , et dont les deux autres dimensions soient dx, dz ; évaluons le flux qui s'échappe de ce prisme pendant l'unité de temps.

Le flux entrant par l'élément de face $dy dz$ situé au point x, y, z est $k' \frac{\delta \theta'}{\delta x} dy dz$. Celui entrant par la face entière de longueur λ est donc

$$k' dz \int_0^\lambda \frac{\delta \theta'}{\delta x} dy = k' dz \frac{\delta}{\delta x} \int_0^\lambda \theta' dy.$$

Si on appelle $v(x, z)$ la moyenne des températures dans le prisme considéré, le flux ci-dessus pourra s'écrire

$$k' dz \frac{\delta v}{\delta x}$$

Le flux sortant par la face opposée du prisme est par conséquent

$$k' dz \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} dx \right).$$

L'excès de ce qui sort sur ce qui entre est donc, pour ces deux faces parallèles

$$k\lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dz.$$

De même, pour les deux autres faces opposées du prisme ; l'excès de ce qui sort verticalement par la face horizontale $z + dz$ sur ce qui entre par la face horizontale z est

$$k\lambda \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dx dz.$$

En écrivant que le flux sortant est nul, on a l'équation indéfinie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

qui est bien l'équation (5) du problème précédent.

Considérons maintenant, au sein de la masse gazeuse, une lame de longueur λ , de largeur dx , d'épaisseur ε , et parcourant l'intervalle depuis z jusqu'à $z + dz$. Calculons, de deux façons différentes, le flux qu'elle cède pendant ce parcours.

Sur un élément, de longueur dy , du bord intérieur de cette lame, entre un flux horizontal $k \frac{\partial \theta}{\partial x} \varepsilon dy$ par unité de temps. Sur le bord intérieur entier, il entrera

$$k\varepsilon \int_0^\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} dy = k\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\lambda \theta dy = k\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}$$

si l'on désigne par $u(x, z)$ la moyenne des températures dans la lame.

D'autre part, par le bord extérieur, il s'échappe un flux

$$k\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right).$$

La différence entre ces deux flux est

$$k\varepsilon \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, \text{ par unité de temps.}$$

Pour aller de la hauteur z à la hauteur $z + dz$, le temps nécessaire est $\frac{dz}{w}$, w étant la vitesse du fluide.

Le flux s'échappant horizontalement pendant cette ascension élémentaire est donc

$$\frac{k}{w} \varepsilon \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dz,$$

D'autre part, ce flux est égal à

$$C_{\lambda} \frac{\partial u}{\partial z} dx dz$$

C étant la chaleur spécifique de l'unité de volume.

On a donc, en posant $\frac{k}{C_{\lambda} v} = a^2$, l'équation indéfinie

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui est bien l'équation indéfinie (4) du problème précédent.

(On a négligé d'évaluer le flux qui s'échappe normalement au plan de la lame; cette approximation est rigoureusement équivalente à celle qui a fait omettre le terme en $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ dans l'équation (4) du problème précédent).

Il reste à montrer que les fonctions u, v satisfont aussi aux *conditions définies* (6), (7), (8), (9), (10), (11).

Pour les conditions (6) de *rayonnement extérieur*, on a, en représentant par $\theta_0(y)$ la température extérieure.

$$\frac{\partial \theta'}{\partial x} \pm \beta(\theta' - \theta_0) = 0 \quad \text{pour } x = \pm(l + l')$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\lambda} \theta' dy \pm \beta \int_0^{\lambda} (\theta' - \theta_0) dy = 0 \quad \text{pour } x = \pm(l + l')$$

condition qui revient à

$$\frac{\partial v}{\partial x} \pm \beta v = 0 \quad \text{pour } x = \pm(l + l')$$

ce qui est bien la condition (6) du problème précédent.

Les conditions de *raccordement calorifique* s'écrivent ici

$$\theta = \theta' \quad \text{et} \quad k \frac{\partial \theta}{\partial x} = k' \frac{\partial \theta'}{\partial x} \quad \text{pour } x = l$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^{\lambda} \theta dy = \int_0^{\lambda} \theta' dy \quad \text{et} \quad k \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\lambda} \theta dy = k' \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\lambda} \theta' dy \quad \text{pour } x = l$$

ce qui peut s'écrire

$$u = v \quad \text{et} \quad k \frac{\partial u}{\partial x} = k' \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{pour } x = l,$$

Ce sont bien les conditions (7) et (8) du problème précédent.

La *condition de symétrie* par rapport au plan $x=0$, relative à la température θ , existera aussi pour sa moyenne u sur chaque ligne (x, z) . On aura donc bien encore, la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

L'*annulation asymptotique* de θ , pour z infini, amène aussi celle de sa moyenne v , d'où la condition (10):

$$v(x, \infty) = 0.$$

Enfin, les valeurs *dans le plan* $z=0$ des fonctions θ et θ' ont nécessairement pour moyennes le long de chaque droite parallèle à oy , précisément la valeur uniforme qu'y prennent l'une ou l'autre des fonctions moyennes u ou v .

Le théorème est donc démontré, puisque le système de nos équations admet certainement *une solution unique*.

DEUXIÈME PARTIE

APERÇUS DIVERS SUR DES PROBLÈMES ANALOGUES AU PRÉCÉDENT MAIS BEAUCOUP PLUS COMPLIQUÉS

CHAPITRE PREMIER

CHEMINÉE CYLINDRIQUE

37. — En faisant les hypothèses du n° 1, on a, pour exprimer les températures des gaz et du mur cylindrique vertical, deux fonctions

u , v , des coordonnées x et z . La coordonnée x indique quel est le rayon de la couche cylindrique à laquelle appartient la molécule considérée, et z quelle est l'altitude de cette molécule au-dessus de l'entrée de la cheminée.

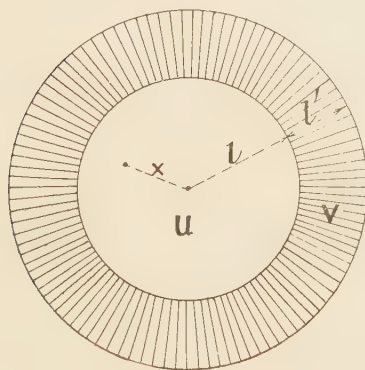


Fig. 2.

la suite des calculs.

Ce problème va présenter une grande analogie avec celui de la lame gazeuse indéfinie dans deux sens et circulant entre deux murs verticaux parallèles. Aussi, allons-nous indiquer très succinctement

38. — Les *équations indéfinies* du problème sont :

1° pour le *mur cylindrique vertical* :

$$(47) \quad \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{1}{x} \frac{\delta v}{\delta x} = 0.$$

2° pour le *fluide en mouvement* :

$$(48) \quad \frac{\delta u}{\delta z} = a^2 \left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{1}{x} \frac{\delta u}{\delta x} \right).$$

a^2 ayant la même signification qu'au n° 2, et en omettant d'écrire le terme en $\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}$ pour les raisons indiquées dans ce numéro.

39. — Les *équations définies* du problème sont :

1° condition de *rayonnement dans l'atmosphère extérieure* :

$$(49) \quad \frac{\delta v}{\delta x} + \beta v = 0 \quad \text{pour } x = l + l', \text{ quel que soit } z.$$

2° conditions de *raccordement calorifique*, sur la paroi $x = l$, entre le fluide en mouvement et la paroi solide :

$$(50) \quad u = v \quad \text{et} \quad k \frac{\delta u}{\delta x} = k' \frac{\delta v}{\delta x} \quad \text{pour } x = l, \text{ quel que soit } z.$$

3° condition de *symétrie* :

$$(51) \quad \frac{\delta u}{\delta x} = 0 \quad \text{pour } x = 0, \quad \text{quel que soit } z.$$

4° condition *relative à z infini* :

$$(52) \quad v(x, \infty) = 0.$$

5° conditions *relatives au plan de base* de la cheminée, $z = 0$

$$(53) \quad \begin{cases} u(x, 0) = u_0 \\ v(x, 0) = v_0. \end{cases}$$

40. — **Résolution du système des deux équations indéfinies (47) et (48) et des conditions définies (49), (50), (51), (52), (53).** — On prendra, pour satisfaire aux deux *équations indéfinies* (47) et (48), et à la *condition de symétrie* (51),

$$(54) \quad \begin{cases} u = \sum A J_0(x) e^{-a^2 m z} \\ v = \sum \mathcal{J}_0(x) \left(A' + B' \int_1^x \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2(x)} \right) e^{-a^2 m z} \end{cases}$$

Les symboles J_0 et $\mathcal{J}_0$ étant définies par les formules

$$(55) \quad \begin{cases} J_0 = 1 - \frac{mx^2}{2^2} + \frac{m^2x^4}{(2.4)^2} - \frac{m^3x^6}{(2.4.6)^2} + \dots \\ \mathcal{J}_0 = 1 - \frac{a^4m^2x^2}{2^2} + \frac{(a^4m^2)^2x^4}{(2.4)^2} - \frac{(a^4m^2)^3x^6}{(2.4.6)^2} \end{cases}$$

u ne représente ainsi qu'une solution particulière de la première équation (54), la solution qui reste *finie au centre*, et répond à la *condition de symétrie* (51).

v , non assujetti à ces conditions, représente l'intégrale générale de la deuxième équation (54). Nous nous sommes préoccupé de donner aux solutions simples correspondantes, dans l'une et l'autre fonction, les mêmes exponentielles, afin de pouvoir écrire des relations définies, indépendantes de la hauteur z .

Pour satisfaire la *condition de rayonnement* (49), portons dans cette relation l'expression (54) de v , et annulons le coefficient de chaque exponentielle. On aura, pour $x = l + l'$,

$$A' \left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right) + B' \left[\left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right) \int_l^{l+l'} \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2} + \frac{1}{x \mathcal{J}_0} \right] = 0$$

d'où l'on tire A' et B' en fonction d'un troisième coefficient indéterminé C , ce qui donne pour v la nouvelle expression :

$$(56) \quad v = \sum C \mathcal{J}_0(x) \left\{ \left[\left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right) \int_l^{l+l'} \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2} + \frac{1}{x \mathcal{J}_0} \right]_{l+l'} - \left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right)_{l+l'} \int_l^x \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2} \right\} e^{-a^2 m z}$$

Ecrivons maintenant les deux *conditions de raccordement* relatives à $x = l$. La *première* donne :

$$A J_0(l) = C \mathcal{J}_0(l) \left[\left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right) \int_l^{l+l'} \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2} + \frac{1}{x \mathcal{J}_0} \right]_{l+l'}$$

d'où

$$A = M \mathcal{J}_0(l) \left[\left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right) \int_l^{l+l'} \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2} + \frac{1}{x \mathcal{J}_0} \right]_{l+l'}$$

$$C = M J_0(l).$$

La *deuxième* donne, pour $x = l$:

$$k A \frac{dJ_0}{dx} = k' C \frac{d\mathcal{J}_0}{dx} \left[\left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right) \int_l^{l+l'} \frac{dx}{x \mathcal{J}_0^2} + \frac{1}{x \mathcal{J}_0} \right]_{l+l'} - k' C \left(\frac{d\mathcal{J}_0}{dx} + \beta \mathcal{J}_0 \right)^{l+l'} \frac{1}{x \mathcal{J}_0}.$$

En portant dans cette équation les valeurs trouvées précédem-

ment pour A et C, on obtiendra l'équation transcendante dont dépendent les m . Il ne reste plus qu'à déterminer les M, en fonction des m , par les conditions relatives au plan $z=0$.

41.— Si l'on pose

$$(57) \begin{cases} U(x) = J_0(l) \left[\left(\frac{dJ_0}{dx} + \beta J_0 \right) \int_l^{l+v} \frac{dx}{x^2 J_0^2 + x J_0} + \frac{1}{x J_0} \right]^{l+v} J_0(x) \\ V(x) = J_0(l) \left[\left(\frac{dJ_0}{dx} + \beta J_0 \right) \int_l^{l+v} \frac{dx}{x^2 J_0^2 + x J_0} \right]_{l+v} - \left(\frac{dJ_0}{dx} + \beta J_0 \right)_{l+v} \int_x^{l+v} \frac{dx}{x^2 J_0^2} J_0(x) \end{cases}$$

les fonctions u , v , seront des sommes de solutions simples du type

$$MU e^{-a^2 m z}, MV e^{-a^2 m z}.$$

En procédant comme au n° 7, on arrive à la formule fondamentale :

$$(58) \quad k \int_0^l U_i U_j dx + k' a^4 (m_i + m_j) \int_l^{l+v} V_i V_j dx = 0 \quad i \leq j.$$

Cette formule fondamentale ne sert guère, en somme, qu'à nous montrer l'impossibilité d'appliquer ici la méthode de Fourier, pour la séparation des coefficients M.

Il faudra donc recourir à la *méthode des moindres carrés* pour la détermination de ces coefficients.

42. — On pourrait démontrer, comme au n° 36, que si la température de l'air extérieur varie avec l'azimuth, le calcul des *moyennes* de la température sur les couches cylindriques $x = c^{te}$, se ramène au calcul des températures uniformes que prennent ces couches sous l'action d'une température extérieure *uniforme*.

CHAPITRE DEUXIÈME

PROBLÈME DES RÉCUPÉRATEURS

§ I. — Description sommaire des appareils.

43. — Dans l'industrie, on est souvent amené à utiliser des chaleurs perdues. Ainsi, la nécessité d'obtenir de la vapeur à haute pression conduit à envoyer, à la cheminée, des gaz à la température de 500 à 600°, c'est-à-dire le triple de ce qui est nécessaire pour obtenir un tirage suffisant. On peut de même penser à capter, au sommet des hauts-fourneaux, les gaz qui se dégagent à une température élevée, pour utiliser la chaleur qu'ils renferment. Pour fixer les idées, plaçons le récupérateur entre la sortie des gaz de la surface de chauffe, et leur entrée dans la cheminée.

44. — **Premier type de récupérateur.** — Il se compose d'une série de carnaux, disposés parallèlement les uns aux autres. On fera circuler, de bas en haut, les gaz chauds pendant trois heures environ, la circulation étant assurée par le tirage de la cheminée. Les parois réfractaires sont ainsi portées au rouge. Au bout de ce laps de temps, par un jeu de valves, les gaz chauds sont envoyés à un autre appareil, identique au précédent. Et dans celui-ci, on fera circuler de haut en bas, l'air froid envoyé par une machine soufflante ; cet air réchauffé servira soit à l'alimentation du foyer, soit à des oxydations industrielles, soit à être mélangé avec les gaz d'un gazogène pour produire leur inflammation. Ce principe de récupération est critiquable au point de vue du rendement, l'action tour à tour refroi-

dissante et échauffante variant d'intensité d'un moment à l'autre⁽¹⁾.

45. — **Deuxième type de récupérateur, dit continu.** — Ici, un seul appareil, constitué comme les précédents, par des carnaux verticaux. Supposons, pour faciliter le langage, qu'on distingue les carnaux de rang pair de ceux de rang impair. On établira dans les premiers, par exemple, une circulation de bas en haut des gaz chauds, et dans les seconds, une circulation, en sens contraire, des gaz froids. L'échange de chaleur, à travers la paroi réfractaire, est ainsi *continu*, et, comme disent les ingénieurs, *methodique*. Ils entendent par là que la partie la plus froide du fluide est correspondante à la partie la moins chaude du fluide chaud, et inversement. De cette façon, on maintient à peu près constante la différence de température entre les parties en regard des deux fluides.

§ II. — Etude théorique des échanges de chaleur entre le fluide chaud et le fluide froid dans les récupérateurs à type continu.

46. — Considérons deux carnaux juxtaposés, pris au sein de l'appareil. Il suffit d'étudier ce qui se passe entre les plans axiaux $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$, (fig. 3). Nous supposons que le nombre des carnaux situés de part et d'autre de celui qu'on considère est suffisamment grand pour que les plans $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ soient des plans de symétrie pour le phénomène. Nous supposons aussi que la longueur des carnaux, dans le sens perpendiculaire au plan de la figure, est suffisante pour que les températures ne dépendent que des coordonnées x, z . Enfin pour rendre le problème facilement abordable à l'Analyse, nous supposons, comme dans le problème de la cheminée, que l'appareil a une *hauteur illimitée*. Le fluide froid pénètre donc par

(1) Si l'on désigne par u la température du fluide chaud en circulation dans les carnaux, v la température des cloisons réfractaires, on aurait en faisant les hypothèses et les approximations de la première partie, les deux équations aux dérivées partielles indéfinies :

$$\begin{aligned} C \left(\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ C' \frac{\partial v}{\partial t} &= k' \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

régissant le phénomène dans la période d'échauffement des parois. On aurait un système de même forme pour la période d'échauffement du fluide froid.

le plan $z = \infty$, à la température de 0° , et circule de haut en bas jusqu'en $z = 0$, par où il s'échappe. Le fluide chaud entre par le plan $z = 0$, s'élève en se refroidissant jusqu'à la section $z = \infty$, où il arrive complètement refroidi, c'est-à-dire ayant acquis la température 0 du fluide froid. Dans ces conditions, le mur aura pour température asymptotique celle qui est commune, pour les grandes valeurs de z , aux deux fluides qu'il sépare, c'est-à-dire 0° .

Ces hypothèses, imaginées pour la plus grande simplification de l'analyse de la question, donneront néanmoins une solution très approximative du problème du récupérateur à hauteur finie, si cette hauteur H est suffisamment grande pour que le fluide chaud ait le temps de se refroidir, presque entièrement, dans son ascension depuis $z = 0$ jusqu'à $z = H$. Dans ces conditions, le fluide froid se réchauffera peu depuis $z = \infty$ jusqu'à $z = H$, et tout se passe comme s'il entrait seulement dans la section $z = H$, à la température de 0° .

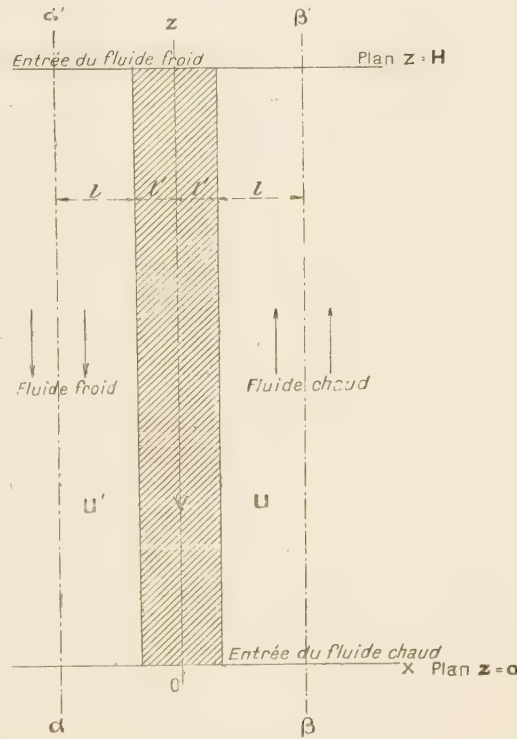


Fig. 3.

47. — **Equations indéfinies du problème.** — 1° *dans la cloison réfractaire* : C'est encore ici l'équation de Laplace

$$(59) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

2° *dans le fluide chaud* :

En appelant :

C la chaleur spécifique de l'unité de volume,
 k la conductibilité intérieure,
 w la vitesse ascendante,

et en posant :

$$a^2 = \frac{k}{Cw}$$

on a l'équation indéfinie

$$(60) \quad \frac{\delta u}{\delta z} = a^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2},$$

en faisant ici, et pour les mêmes raisons, la même approximation que dans la formule (4).

3° dans le fluide froid :

soient k' , C' , w' les quantités correspondantes dans le fluide froid à k , C , w dans le fluide chaud. Ici w' est négatif, et il faut poser

$$\frac{k'}{C'w'} = -a'^2.$$

L'équation indéfinie qui régit la température est donc :

$$(61) \quad \frac{\delta u'}{\delta z} = -a'^2 \frac{\delta^2 u'}{\delta x'^2}.$$

48. — Conditions définies du problème. — Les conditions définies du problème sont :

1° Les conditions de symétrie

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = 0 & \text{pour } x = l + l' \\ \frac{\delta u'}{\delta x} = 0 & \text{pour } x = -(l + l') \end{cases}$$

2° Les conditions de raccordement calorifique entre chacun des deux fluides et la cloison réfractaire

$$(63) \quad \begin{cases} u = v & \text{et } k \frac{\delta u}{\delta x} = K \frac{\delta v}{\delta x} & \text{pour } x = l', \\ u' = v & \text{et } k' \frac{\delta u'}{\delta x} = K \frac{\delta v}{\delta x} & \text{pour } x = -l', \end{cases}$$

en désignant par K la conductibilité intérieure de la cloison.

3° Les conditions relatives au plan $z=0$ sont

$$(64) \quad \begin{cases} u(x,0) = u_0 \\ v(x,0) = v_0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) Voir pour cette fonction v_0 ce qui a été dit dans la note du n° 29.

4° Les conditions relatives au plan $z = \infty$ sont

$$(65) \quad u'(x, \infty) = 0$$

$$(66) \quad v(x, \infty) = 0.$$

5° Enfin, il faut ajouter à ces conditions la *relation fondamentale de calorimétrie* exprimant que toute la chaleur perdue par le fluide chaud, augmentée de celle qui pénètre dans le mur par son rectangle de base, est égale à la chaleur gagnée par le fluide froid.

49. — **Intégration de ce système d'équations.** — Nous prenons, pour satisfaire aux trois équations indéfinies, et aux conditions définies (62), (65), (66), les trois fonctions

$$(67) \quad \begin{cases} u = \sum A e^{-m^2 z} \cos \frac{m}{a} (l + l' - x). \\ v = \sum e^{-m^2 z} (A' \cos m^2 x + B' \sin m^2 x) \\ u' = \sum B e^{-m^2 z} \operatorname{ch} \frac{m}{a} (l + l' + x). \end{cases}$$

Pour satisfaire aux conditions relatives à $x = l'$, on doit avoir, en annulant le coefficient de chaque exponentielle :

$$(68) \quad \begin{cases} A \cos \frac{ml}{a} = A' \cos m^2 l' + B' \sin m^2 l'. \\ A \frac{k}{a} \sin \frac{ml}{a} = Km (-A' \sin m^2 l' + B' \cos m^2 l'). \end{cases}$$

Si on élimine A entre ces deux équations, on trouve

$$(69) \quad A' \left(\frac{k}{a} \sin \frac{ml}{a} \cos m^2 l' + Km \sin m^2 l' \cos \frac{ml}{a} \right) = B' \left(Km \cos m^2 l' \cos \frac{ml}{a} - \frac{k}{a} \sin \frac{ml}{a} \sin m^2 l' \right),$$

d'où A' et B' en fonction d'un troisième coefficient indéterminé C , ce qui permet de mettre la fonction v sous la forme

$$(70) \quad v = \sum C e^{-m^2 z} \left[Km \cos \frac{ml}{a} \cos m^2 (l' - x) - \frac{k}{a} \sin \frac{ml}{a} \sin m^2 (l' - x) \right].$$

Les deux conditions relatives à $x = -l'$ s'écrivent donc, en employant l'expression (67) de u' , et l'expression (70) de v :

$$(71) \quad \begin{cases} B \operatorname{ch} \frac{ml}{a} = C \left(Km \cos \frac{ml}{a} \cos 2m^2 l' - \frac{k}{a} \sin \frac{ml}{a} \sin 2m^2 l' \right) \\ B \frac{k'}{a} \operatorname{sh} \frac{ml}{a} = CKm \left(Km \cos \frac{ml}{a} \sin 2m^2 l' + \frac{k}{a} \sin \frac{ml}{a} \cos 2m^2 l' \right). \end{cases}$$

En écrivant que ces deux conditions sont compatibles, on a l'équation transcendante dont dépendent les m :

$$(72) \quad K m c h \frac{m l}{a} \left(K m \cos \frac{m l}{a} \sin 2 m^2 l' + \frac{k}{a} \sin \frac{m l}{a} \cos 2 m^2 l' \right) \\ = \frac{k'}{a} s h \frac{m l}{a} \left(K m \cos \frac{m l}{a} \cos 2 m^2 l' - \frac{k}{a} \sin \frac{m l}{a} \sin 2 m^2 l' \right).$$

L'une quelconque des équations (71), la première par exemple, donne alors B et C en fonction d'un troisième coefficient indéterminé M :

$$B = M \left(K m \cos \frac{m l}{a} \cos 2 m^2 l' - \frac{k}{a} \sin \frac{m l}{a} \sin 2 m^2 l' \right) \\ C = M c h \frac{m l}{a}.$$

Enfin, si dans la première équation (68), on remplace A' et B' en fonction de C , et celui-ci en fonction de M , on trouve

$$A = m M K c h \frac{m l}{a}.$$

On a donc finalement, pour satisfaire aux équations indéfinies du problème, et aux conditions définies (62), (63), (65), (66), les trois fonctions

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \sum M K m c h \frac{m l}{a} \cos \frac{m}{a} (l + l' - x) e^{-m^2 z} \\ v &= \sum M c h \frac{m l}{a} \left[K m \cos \frac{m l}{a} \cos m^2 (l' - x) - \frac{k}{a} \sin \frac{m l}{a} \sin m^2 (l' - x) \right] e^{-m^2 z} \\ u' &= \sum M \left(K m \cos \frac{m l}{a} \cos 2 m^2 l' - \frac{k}{a} \sin \frac{m l}{a} \sin 2 m^2 l' \right) c h \frac{m}{a} (l + l' + x) e^{-m^2 z} \end{aligned} \right.$$

les sommations étant étendues à toutes les racines positives m de l'équation (72).

50. — Il ne reste plus actuellement qu'à déterminer les coefficients M par la condition de satisfaire aux conditions (64) et à celle qui résulte de la relation fondamentale de calorimétrie dont il est parlé au n° 48.

On suppose u_0 uniforme dans toute la section $z = 0$, ainsi que v_0 , et soit :

$$u_0 = v_0 = T,$$

T étant la température d'entrée, uniforme, du fluide chaud.

On suppose de plus que les débits en masse des deux fluides sont égaux, ainsi que leurs chaleurs spécifiques, et que toute la chaleur cédée par le fluide chaud a été gagnée par le fluide froid, ce

qui revient à faire abstraction de celle qui a pénétré dans le mur par son rectangle de base $z = 0$, s'est élevée par conductibilité dans ce mur, puis a été déversée latéralement dans le fluide froid. Ces hypothèses reviennent à supposer que dans le plan $z = 0$

$$\text{Moyenne de } u'(x, 0) = T.$$

D'autre part le maximum de $u'(x, z)$ dans chaque section de niveau a toujours lieu sur le bord $x = -l'$. Or dans le plan $z = 0$, ce maximum est nécessairement T . Le *maximum* de $u'(x, 0)$ étant égal à sa *moyenne*, $u'(x, 0)$ est uniformément égal à cette moyenne T .

Si donc, on met les trois fonctions u, v, u' , sous la forme

$$\begin{aligned} u &= \sum MU e^{-a^2 m^2 z} \\ v &= \sum MV e^{-a^2 m^2 z} \\ u' &= \sum MU' e^{-a^2 m^2 z} \end{aligned}$$

les conditions relatives au plan $z = 0$ s'écriront :

$$(74) \quad \begin{cases} \sum MU = T \\ \sum MV = T \\ \sum MU' = T \end{cases}$$

Les calculs du n° 7 se généralisent sans difficulté à ce cas plus compliqué et aboutissent à la *formule fondamentale*:

$$(75) \quad \frac{k'}{a^2} \int_{-l'}^{-l+l'} U'_i U'_j dx + \frac{k}{a^2} \int_{l'}^{l+l'} U_i U_j dx + K(m_i^2 + m_j^2) \int_{-l'}^{l+l'} V_i V_j dx = 0, \quad i \geq j.$$

Cette formule fondamentale ne sert guère d'ailleurs qu'à montrer l'impossibilité d'appliquer la méthode de Fourier au calcul des coefficients M . Ceux-ci devront s'évaluer par la méthode des moindres carrés, qui reviendra ici à rendre minimum l'intégrale :

$$\int_{-l'}^{-l+l'} \left(T - \sum MU' \right)^2 dx + \int_{-l'}^{l+l'} \left(T - \sum MV \right)^2 dx + \int_{l'}^{l+l'} \left(T - \sum MU \right)^2 dx.$$

§ III. — Etude du cas théorique $l' = 0$.

51. — Nous ferons d'abord remarquer qu'on pourra assimiler à ce cas théorique, celui des récupérateurs métalliques où la cloison qui sépare les deux fluides est constituée par une mince feuille de tôle.

Si l'on fait $l' = 0$ dans nos formules (72) et (73), l'équation transcendante qui donne les m devient :

$$(76) \quad m \left(\frac{k}{a} \operatorname{tg} \frac{ml}{a} - \frac{k'}{a'} \operatorname{tgh} \frac{ml}{a'} \right) = 0.$$

et les fonctions qui expriment les températures deviennent :

$$(77) \quad \begin{cases} u = \sum \text{MK} m ch \frac{ml}{a} \cos \frac{m}{a} (l - x) e^{-m^2 z} \\ v = \sum \text{MK} m ch \frac{ml}{a} \cos \frac{ml}{a} e^{-m^2 z} \\ u' = \sum \text{MK} m \cos \frac{ml}{a} ch \frac{m}{a'} (l + x) e^{-m^2 z} \end{cases}$$

La racine $m = 0$ de l'équation transcendante (76) donne un terme nul dans chacune des trois fonctions u , v , u' . Il était aisé de le prévoir *a priori*, car ce terme représente la limite des températures pour $z = \infty$, limite qui est nécessairement nulle pour chacune des trois fonctions u , v , u' .

On remarque, par l'examen des formules (77) qu'on a bien

$$u(0, z) = v(z) = u'(0, z) \quad \text{quel que soit } z$$

comme il fallait s'y attendre.

52. — Il ne reste plus actuellement qu'à déterminer les M par la condition de satisfaire aux conditions (74), dont on doit considérer seulement ici les deux relatives aux fluides. La *formule fondamentale* (75) qui n'a servi, dans le cas général, qu'à nous éclairer sur la difficulté du problème, servira dans ce cas particulier, à la séparation des M . Elle devient, à cause de l'annulation du champ de sa troisième intégrale :

$$(78) \quad \frac{k}{a^2} \int_0^l U_i U_j dx + \frac{k'}{a'^2} \int_0^{l'} U'_i U'_j dx = 0 \quad i \neq j.$$

Des deux conditions (74) relatives aux fluides, on déduit aisément, en tenant compte de la formule fondamentale (78)

$$(79) \quad M = \frac{T \left[\frac{k}{a^2} \int_0^l U dx + \frac{k'}{a'^2} \int_0^{-l} U' dx \right]}{\frac{k}{a^2} \int_0^l U^2 dx + \frac{k'}{a'^2} \int_0^{-l} U'^2 dx}$$

Les M se trouvent ainsi déterminés par une méthode qui est une *extension toute naturelle de celle de Fourier*. En portant ces valeurs des coefficients M dans les formules (77), celles-ci donneront la solution du problème.

§ IV. — Analogie des résultats précédents avec des résultats obtenus par Poisson. L'analogie entre les deux problèmes est encore plus grande si les deux fluides circulent dans le même sens.

53. — La *formule fondamentale* (78) relative au cas théorique $l' = 0$ est analogue à celle établie par Poisson, dans son second mémoire « *sur le refroidissement d'un corps solide formé de deux noyaux sphériques concentriques* » ⁽¹⁾. On peut dire aussi que cette formule fondamentale entre comme cas particulier dans celle établie par M. Boussinesq ⁽²⁾, et qui se trouve applicable au cas du refroidissement d'un corps formé par la juxtaposition de diverses parties hétérogènes. Néanmoins, il n'est pas possible d'imaginer un énoncé de problème de refroidissement de deux corps solides, admettant comme système d'équations indéfinies ou définies celui du paragraphe précédent. La chose est aisée, au contraire, dans le cas où les deux fluides circulent *dans le même sens*.

54. — Supposons en effet, le fluide chaud entrant par le plan $z = 0$, à la température uniforme u_0 ; le fluide froid entrant par la même section, à la température initiale u'_0 . Les deux fluides s'élèvent simultanément dans l'appareil et leurs températures tendent vers une limite commune qui sera $\frac{u_0 + u'_0}{2}$ si l'on suppose le même

⁽¹⁾ POISSON. — 19^e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*.

⁽²⁾ BOUSSINESQ. — *Théorie analytique de la chaleur*. — Tome I, page 246.

débit en masse pour les deux fluides, ainsi que l'égalité de leurs chaleurs spécifiques.

Les équations *indéfinies* du problème sont alors

1° pour le fluide chaud :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a^2 = \frac{k}{C\alpha}$$

2° pour le fluide froid :

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = a'^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a'^2 = \frac{k'}{C'\alpha'}$$

Les équations *définies* du problème sont :

1° les conditions de *symétrie* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour } x = l \quad \text{quel que soit } z, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0 \quad \text{pour } x = -l \quad \text{quel que soit } z. \end{aligned}$$

2° Les conditions de *raccordement calorifique* dans le plan de séparation $x=0$, sont :

$$\left. \begin{aligned} u &= u' \\ k \frac{\partial u}{\partial x} &= k' \frac{\partial u'}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{pour } x=0, \text{ quel que soit } z.$$

3° Les conditions *relatives* à $z=0$ sont :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0 \\ u'(x, 0) &= u'_0 \end{aligned}$$

4° Les conditions *asymptotiques* pour $z=\infty$,

$$u(x, \infty) = u'(x, \infty) = \frac{u_0 + u'_0}{2}$$

Si l'on pose dans ces équations $z = \alpha t$, on aura un système d'équations définissant deux fonctions u et u' , des variables x, t , qui répondra à l'énoncé suivant :

On applique l'une contre l'autre deux lames indéfinies à faces parallèles d'épaisseur constante l . Les faces extérieures $x = \pm l$ sont imperméables, les conductibilités respectives des deux lames sont k et k' , la lame comprise entre les plans $x=0$ et $x=l$ est portée à la température initiale uniforme u_0 , l'autre étant portée à la température initiale uniforme u'_0 .

On demande d'établir la loi de succession des températures dans les deux lames,

CHAPITRE TROISIÈME

CHEMINÉES A SECTION CARRÉE OU RECTANGULAIRE

55. — Nous ne traitons pas ce problème, dont l'étude mathématique nous a paru très difficile, et auquel les méthodes de calcul employées dans la première partie de cette thèse, ne s'appliquent pas.

Nous allons nous contenter de justifier approximativement l'emploi de la formule (46), par laquelle nous avons déduit des résultats calculés sur une cheminée à deux faces, ceux relatifs à une cheminée à section carrée; et nous généraliserons cette formule au cas d'une cheminée à section rectangulaire.

On remarquera sans peine la grande analogie des calculs qui vont suivre avec ceux de Fourier, dans son étude de la "*propagation de la chaleur dans un cube solide*" ⁽¹⁾.

§ I. — Problème de la lame indéfinie à faces parallèles

56. — Supposons une lame gazeuse d'épaisseur constante $2l$ dans le sens ox , indéfinie dans le sens oy , et circulant de bas en haut, dans le sens des z positifs, depuis le plan $z=0$, où les gaz entrent à la température uniforme T .

Ce problème revient à supposer, dans l'énoncé de celui qui est traité dans la première partie de la thèse, *l'épaisseur* des murs verticaux *infinitement petite*.

⁽¹⁾ *Œuvres de Fourier*, publiées par M. Gaston Darboux (Chapitre VIII).

En adoptant les notations de la première partie, on aura l'équation indéfinie :

$$(80) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et les conditions définies :

$$(81) \quad 1^\circ \quad \frac{\partial u}{\partial x} \pm \beta u = 0 \text{ pour } x = \pm l$$

condition exprimant le *rayonnement* des faces latérales dans l'atmosphère supposée à 0°.

2° la condition de *symétrie*

$$(82) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0$$

3° condition relative au *plan* $z = 0$:

$$(83) \quad u(x, 0) = T.$$

57. — L'équation indéfinie est satisfaite par la solution simple :

$$u = A e^{-a^2 m^2 z} \cos m x$$

qui satisfait de plus à la condition de *symétrie*.

Pour satisfaire aux conditions de *rayonnement extérieur*, il suffira de prendre m racine de l'équation transcendante

$$(83 \text{ bis}) \quad -m \sin ml + \beta \cos ml = 0$$

Enfin, pour satisfaire à la condition *d'état initial*, on prendra la solution nécessairement plus générale,

$$u = \sum_i A_i e^{-a^2 m_i^2 z} \cos m_i x.$$

la sommation étant étendue aux racines positives de l'équation (83 bis). Et l'on déterminera les A par la condition qu'ils donnent :

$$T = \sum_i A_i \cos m_i x$$

d'où

$$A_i = \frac{4T \sin m_i l}{2m_i l + \sin 2m_i l}$$

on a donc la solution :

$$(84) \quad u = \sum_i \frac{4T \sin m_i l}{2m_i l + \sin 2m_i l} \cos m_i x e^{-a^2 m_i^2 z},$$

58. — On déduit aisément de cette formule, la valeur de la *température moyenne* dans une section d'ordonnée z . Posons

$$X = \sum_i \frac{4 \sin m_i l}{2m_i l + \sin 2m_i l} \cos m_i x e^{-a^2 m_i^2 z}$$

On a

$$u = TX$$

et en appelant V la température moyenne d'une section droite.

$$(85) \quad V = \frac{T}{l} \int_0^l X dx$$

§ II. — Problème de la lame à section carrée de côté $2l$.

59. — On suppose toujours les parois de la cheminée *infinitement minces*.

L'équation indéfinie, où nous continuons à négliger le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ est

$$(86) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Les conditions définies sont :

$$(87) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \pm \beta u = 0 & \text{pour } x = \pm l \\ \frac{\partial u}{\partial y} \pm \beta u = 0 & \text{pour } y = \pm l \end{cases}$$

$$(88) \quad u(x, y, 0) = T$$

L'équation indéfinie est satisfaite par la solution simple

$$u = Ae^{-a^2(m^2 + n^2)z} \cos mx \cos ny$$

qui satisfait de plus aux conditions de symétrie exigées par la question. Pour satisfaire aux conditions (87) il suffit de prendre m et n racines de l'équation transcendante

$$(89) \quad -\epsilon \sin \epsilon l + \beta \cos \epsilon l = 0$$

Pour satisfaire à la condition (73) considérons la solution plus générale

$$u = \sum_i \sum_k A_{ik} e^{-a^2(m_i^2 + m_k^2)z} \cos m_i x \cos m_k y.$$

On doit avoir :

$$T = \sum_i \sum_k A_{ik} \cos m_i x \cos m_k y.$$

On sait que Fourier, ayant eu à faire ce développement, a posé sans explications :

$$A_{ik} = a_i a_k.$$

M. Darboux, dans une note insérée à l'article 322 des "*Œuvres de Fourier*" a donné une démonstration de l'intuition de Fourier⁽¹⁾.

On devra ainsi avoir

$$T = (a_1 \cos m_1 x + a_2 \cos m_2 x + \dots) (a_1 \cos m_1 y + a_2 \cos m_2 y + \dots)$$

On déterminera donc a_i par la condition

$$\sqrt{T} = \sum_i a_i \cos m_i x$$

d'où

$$a_i = \frac{4 \sqrt{T} \sin m_i l}{2m_i l + \sin 2m_i l}$$

et l'on a finalement

$$u = \left(\sum_i \frac{4 \sqrt{T} \sin m_i l}{2m_i l + \sin 2m_i l} e^{-a^2 m_i^2 z} \cos m_i x \right) \left(\sum_i \frac{4 \sqrt{T} \sin m_i l}{2m_i l + \sin 2m_i l} e^{-a^2 m_i^2 z} \cos m_i y \right).$$

60. — En reprenant la notation X du problème précédent, et en posant Y la fonction analogue en y, z , on aura

$$u = TXY$$

Appelons W la *température moyenne*, on aura

$$(90) \quad W = \frac{T}{l^2} \int_0^l X dx \int_0^l Y dy = T \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l X dx \right\}^2.$$

§ III. — Comparaison entre les deux problèmes précédents.

61. — On voit avec quelle aisance, on passe du problème à deux faces parallèles indéfinies, à celui où la section est carrée. On voit

(1) La démonstration de M. Darboux, faite pour T constant, s'étend sans difficulté au cas où T est de la forme $T = f(x) \cdot \varphi(y)$.

aussi que les m , étant donnés dans l'un et l'autre problème, par la même *équation transcendante*, on peut aisément comparer les températures moyennes dans l'un et l'autre cas, prises à la même hauteur z . On a, en effet, en comparant les formules (85) et (90), la formule déjà citée :

$$(46) \quad W = \frac{V^2}{T}.$$

La formule (46) se trouve ainsi justifiée rigoureusement pour le cas où l'on fait abstraction de l'épaisseur des parois de la cheminée.

62. — On peut facilement faire l'extension de la loi précédente au cas d'une cheminée à *section rectangulaire*. Cette extension ne présentant aucune difficulté, nous nous contentons d'énoncer les résultats :

Soit W la *moyenne* des températures dans la section droite $z = H$ d'une cheminée dont les parois ont une épaisseur infiniment mince, et dont la section est un rectangle.

Soit V_1 la *moyenne* des températures dans la même section, si deux faces opposées de la cheminée deviennent imperméables.

Soit V_2 cette *moyenne*, dans le cas où ce sont les deux autres faces opposées qui deviennent imperméables.

On aura par un raisonnement analogue à celui qui a servi à établir la formule (46), cette autre formule qui en est une généralisation :

$$(91) \quad W = \frac{V_1 V_2}{T}.$$

63. — Les lois exprimées par les formules (46) et (91) sont très simples et très intéressantes. Et on pourra les considérer comme des *lois approximatives* dans le cas où l'épaisseur des parois est faible, et que leur conductibilité est grande.

Vu et approuvé ;

Paris, le 15 Novembre 1905,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
P. APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 15 Novembre 1905,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.
L. LIARD.

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Sur la représentation approchée au moyen de polynômes
des fonctions d'une variable réelle.

Vu et approuvé :

Paris, le 15 Novembre 1905.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
P. APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 15 Novembre 1905.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

Sens. — Société Nouvelle de l'Imprimerie MIRIAM.
